

Un corrigé du concours Centrale-maths-2- MP-2018
Omar SADIK- CPGE Moulay Driss-Fès

I : Fonctions harmoniques : quelques propriétés

1. On a $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. La fonction nulle est harmonique. Soient $f, g \in \mathcal{H}(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$; $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est linéaire, donc $\Delta(f + \lambda g) = \Delta(f) + \lambda \Delta(g) = 0$, alors $f + \lambda g \in \mathcal{H}(U)$, donc $\mathcal{H}(U)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

2. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \cap \mathcal{H}(U)$, soit $p \in \mathbb{N}$, posons $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} = g$, alors par application du théorème de Schwartz et de la linéarité de l'opérateur dérivée partielle; $\Delta(g) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^p}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0$.
 Donc $g \in \mathcal{H}(U)$.

3. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$, alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\frac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Alors $\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, donc

$$\begin{aligned} \Delta f^2 = 0 &\iff \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n f \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + f \Delta(f) = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = 0 \text{ car } f \in \mathcal{H}(U) \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}$$

f est de classe \mathcal{C}^1 sur U donc différentiable sur U et $\forall x \in U, \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $df(x)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, alors $df = 0$, et U est connexe par arcs, donc f est constante sur U .

Remarque Si on a supposé que U est un convexe

Soit $(x, y) \in U^2$ qui est convexe, alors le chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, $t \mapsto (1-t)x + ty = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$,

alors $(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) = 0$, donc $f \circ \gamma$ est constant sur $[0, 1]$,
alors $f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1)$, c'est à dire $f(x) = f(y)$ pour tout $x, y \in U$, alors f
est constant sur U ,

Réciproquement toute fonction f constante sur U vérifie $f^2 \in \mathcal{H}(U)$,
donc l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f^2 \in \mathcal{H}(U)$ est l'en-
semble des fonctions constantes sur U .

4. L'application $f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ est harmonique, mais f^2 ne l'est
pas, donc le produit de deux fonctions harmoniques sur U n'est pas né-
cessairement harmonique sur U .

II : Exemples de fonctions harmoniques

II. A

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta(f)(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y)$. Or $f \neq 0$, donc $\exists (x_0, y_0) \in$
 \mathbb{R}^2 tel que $f(x_0, y_0) \neq 0$, alors $u(x_0)v(y_0) \neq 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $u''(x) = -u(x) \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$,
posons $\lambda = \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$, alors $u'' + \lambda u = 0$ et $\frac{u''(x_0)}{u(x_0)} = -\frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$, alors $v''(y) -$
 $\lambda v(y) = 0$, ainsi le résultat.

6. • Si $\lambda = 0$, alors f est de la forme $f(x, y) = (ax + b)(cy + d)$
• Si $\lambda > 0$, alors f est de la forme $f(x, y) = \left(a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x) \right) \left(c e^{\sqrt{\lambda}y} + d e^{-\sqrt{\lambda}y} \right)$
• Si $\lambda < 0$, alors f est de la forme $f(x, y) = \left(a e^{\sqrt{-\lambda}x} + b e^{-\sqrt{-\lambda}x} \right) \left(c \cos(\sqrt{-\lambda}y) + d \sin(\sqrt{-\lambda}y) \right)$
où a, b, c, d sont des constantes arbitraires.

La vérification est simple.

II. B

7. L'application $h : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$
car ses composantes le sont sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, et $g = f \circ h$ est de classe \mathcal{C}^2 sur
 $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 .
8. Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on pose $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) &= \cos(\theta) \left[\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \right] + \\
&\quad \sin(\theta) \left[\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right] \\
&= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ Par Schwartz} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) &= -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - r \sin(\theta) \left[-r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \right] \\
&\quad -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + r \cos(\theta) \left[-r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right] \\
&= r^2 \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
&\quad -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ Par Schwartz}
\end{aligned}$$

10. Posons $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, alors

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r^2 \Delta(f)(x, y)$$

D'où l'équivalence car $r \neq 0$.

11. Par la question 10, f est harmonique radiale de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ si et seulement si, $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$ si et seulement si $g(r, \theta) = \lambda \ln(r) + \mu$ où λ et μ des constantes arbitraires, les fonctions f cherchées sont donc de la forme $f(x, y) = \lambda \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + \mu$.

12. Il suffit de voir parmi les fonctions de la question 11) ceux qui vérifient en plus $f(x, y) = a$ si $\|(x, y)\| = r_1$ et $f(x, y) = b$ si $\|(x, y)\| = r_2$, alors $f(x, y) = \lambda \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + \mu$ avec $\lambda = \frac{a-b}{\ln(r_1/r_2)}$ et $\mu = a - \frac{a-b}{\ln(r_1/r_2)} \ln(r_1)$.

II : C

13. On a : $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $f(r \cos(\theta+2\pi), r \sin(\theta+2\pi)) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, donc $u(r)v(\theta+2\pi) = u(r)v(\theta)$, la fonction $f \neq 0$, $\exists (r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ tel que $u(r_0)v(\theta_0) \neq 0$, donc $u(r_0) \neq 0$, par conséquent $v(\theta+2\pi) = v(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. ce qui est demandée.

14. Par la question 10) ici $g(r, \theta) = u(r)v(\theta)$ et l'équation $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$ devient $r^2 u''(r)v(\theta) + u(r)v''(\theta) + r u'(r)v(\theta) = 0$

Or $v(\theta_0) \neq 0$, donc $r^2 u''(r) + r u'(r) + u(r) \frac{v''(\theta_0)}{v(\theta_0)} = 0$, on prend $\lambda = -\frac{v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$, alors l'équation précédente devient $r^2 u''(r) + r u'(r) - \lambda u(r) = 0$.

De même $u(r_0) \neq 0$, donc $v''(\theta) + \left(\frac{r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0)}{u(r_0)} \right) v(\theta) = 0$

Mais $\frac{r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0)}{u(r_0)} = -\frac{v''(\theta_0)}{v(\theta_0)} = \lambda$, donc $v''(\theta) + \lambda v(\theta) = 0$, ce qui est demandée.

II.C.1)

15. Si $\lambda = 0$, les solutions 2π -périodiques de II.2 sont de la forme $z(\theta) = cte$.
16. Dans ce cas l'équation II.1 devient $r^2 z'' + r z' = 0$, alors $z(r) = \lambda \ln(r) + \mu$, où λ et μ sont des constantes arbitraires.
17. Alors $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \alpha(\lambda \ln(r) + \mu)$ c'est à dire $f(x, y) = \alpha(\lambda \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + \mu))$ où α, λ et μ sont des constantes arbitraires.

La réciproque est évidente.

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

18. Dans ce cas l'équation II.2 admet des solutions 2π -périodiques si et seulement si $\lambda > 0$, et dans ce cas elles sont de la forme $z(\theta) = a \cos(\sqrt{\lambda} \theta) + b \sin(\sqrt{\lambda} \theta)$ où a, b sont des constantes arbitraires.
19. On a $z(r) = z(e^{\ln r})$, car $r > 0$, Posons donc $z(r) = Z(\ln r)$, alors $z'(r) = \frac{1}{r} Z'(\ln r)$ et $z''(r) = \frac{1}{r^2} Z''(\ln r) - \frac{1}{r^2} Z'(\ln r)$. alors

$$\begin{aligned} \text{l'équation (II.1)} &\iff Z''(\ln r) - Z'(\ln r) + Z'(\ln r) - \lambda Z(\ln r) = 0 \\ &\iff Z''(\ln r) - \lambda Z(\ln r) = 0 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} z(r) = Z(\ln r) &= \alpha \cos(\sqrt{-\lambda} \ln r) + \beta \sin(\sqrt{-\lambda} \ln r) \text{ si } \lambda < 0 \\ z(r) = Z(\ln r) &= a e^{\sqrt{\lambda} \ln r} + b e^{-\sqrt{\lambda} \ln r} \text{ si } \lambda > 0 \end{aligned}$$

20. Les solutions prolongeables en 0 sont

$$\begin{aligned} z(r) = Z(\ln r) &= 0 \text{ si } \lambda < 0 \\ z(r) = Z(\ln r) &= a e^{\sqrt{\lambda} \ln r} \text{ si } \lambda > 0 \end{aligned}$$

III. Principe du maximum faible

III.A

21. U un ouvert borné, donc \overline{U} est un fermé borné de \mathbb{R}^n qui est de dimension finie, donc \overline{U} est un compact et f est continue sur ce compact, alors elle est bornée et atteint sa borne supérieure en un point $x_0 \in \overline{U}$ car f est à valeurs dans \mathbb{R} .
22. Supposons que $x_0 \in U$, si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \leq 0$, alors $\Delta(f)(x_0) \leq 0$, ce qui est absurde.

Donc $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$, considérons $\varphi(t) = f(x_0 + te_i)$, alors φ est deux fois dérivable en 0 et $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n (\gamma_j(t))' \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + te_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + te_i)$ car $\gamma_j(t) = cte$ pour tout $j \neq i$ et $\gamma_i'(t) = 1$, de même $\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0 + te_i)$.

f est de classe \mathcal{C}^2 donc de \mathcal{C}^1 et f admet un maximum en $x_0 \in U$ et U est un ouvert donc x_0 est un point critique de f , alors en particulier $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, On a au voisinage de 0, $\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t}{2}\varphi''(0) + o(t^2)$ car φ est de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de 0, donc pour t voisin 0 on a $f(x_0 + te_i) = f(x_0) + t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) + o(t^2)$

$$\text{Alors } f(x_0 + te_i) = f(x_0) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) + o(t^2)$$

La quantité $(f(x_0 + te_i) - f(x_0))$ est négative au voisinage de 0 car f possède un maximum en x_0 , donc nécessairement $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \leq 0$ ce qui est absurde. Alors $x_0 \in \partial U$.

On a $\sup_{y \in \overline{U}} f(y) = \sup_{y \in \partial U} f(y) = f(x_0)$, donc $\forall x \in U$; $f(x) < f(x_0) = \sup_{y \in \partial U} f(y)$, car f atteint son maximum sur \overline{U} en seulement des point $x_0 \notin U$.

III.B

23. Posons $x = (x_1, \dots, x_n)$, alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

f est continue sur \overline{U} de classe \mathcal{C}^2 sur U , alors g_ε aussi, car $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n .

De plus $\forall x \in U$, $\Delta(g_\varepsilon)(x) = \Delta(f)(x) + 2\varepsilon = 2\varepsilon$ car f est harmonique sur U .
Par conséquent $\forall x \in U$, $\Delta(g_\varepsilon)(x) > 0$.

24. Par application de la partie III.A, $\forall x \in U$, $g_\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(x)$, c'est à dire

$$\forall x \in U, f(x) + \varepsilon \|x\|^2 < \sup_{y \in \partial U} (f(y) + \varepsilon \|y\|^2).$$

Comme ∂U est un compact, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in \partial U, \forall x \in U, f(x) + \varepsilon \|x\|^2 < f(y_\varepsilon) + \varepsilon \|y_\varepsilon\|^2.$$

$$\text{En particulier } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in \partial U, \forall x \in U, f(x) + \frac{1}{n} \|x\|^2 < f(y_n) + \frac{1}{n} \|y_n\|^2.$$

On peut extraire de la suite $(y_n)_n$ du compact ∂U , une sous suite $(y_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $z \in \partial U$.

Et en faisant tendre n vers l'infini dans

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in \partial U, \forall x \in U, f(x) + \frac{1}{\varphi(n)} \|x\|^2 < f(y_{\varphi(n)}) + \frac{1}{\varphi(n)} \|y_{\varphi(n)}\|^2 \text{ on}$$

obtient :

$$\exists z \in \partial U, \forall x \in U, f(x) \leq f(z), \text{ mais } f(z) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y), \text{ alors}$$

$$\boxed{\forall x \in U, f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)}$$

25. L'application $f_1 - f_2$ vérifie bien les hypothèses de la partie III.B, alors
 $\forall x \in U$, $(f_1 - f_2)(x) \leq \sup_{y \in \partial U} (f_1 - f_2)(y) = 0$ car $f_1 = f_2$ sur ∂U , donc $\forall x \in U$,
 $(f_1 - f_2)(x) \leq 0$, de même $\forall x \in U$, $(f_2 - f_1)(x) \leq 0$, alors $f_1 = f_2$ sur U .

IV. Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

26. Soit $(x, y) \in D(0, R)$, alors $|x + iy| < R$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est au moins égal à R .

Soit $y \in]-R, R[$ et soit l'application $h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$ qui est bien

définie sur $V_y = \left] -\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2} \right[$ et $h_n(x) = a_n (x + iy)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc $\sum_n h_n$ converge simplement sur V_y .

$\forall n \in \mathbb{N}$, h_n est de classe \mathcal{C}^1 sur V_y et $\forall x \in V_y$; $h'_n(x) = n a_n (x + iy)^{n-1}$.

Soit $a \in \left] 0, \sqrt{R^2 - y^2} \right[$, alors $\forall x \in [-a, a]$, $|h'_n(x)| \leq n |a_n| \sqrt{a^2 + y^2}^{n-1}$, et

puisque $\sqrt{a^2 + y^2} < R$ et que la série $\sum n a_n z^{n-1}$ a au moins un rayon égal

R , alors $\sum_n h'_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$,

alors h est de classe \mathcal{C}^1 sur V_y et sur V_y on a $h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}$,

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $D(0, R)$.

L'application $(x, y) \mapsto n a_n (x + iy)^{n-1}$ est continue sur $D(0, R)$ pour tout $n \geq 1$, car polynôme et $\forall r \in]0, R[$, $\forall (x, y) \in D(0, r)$, $|n a_n (x + iy)^{n-1}| \leq n |a_n| r^{n-1}$ et la série $\sum_{n \geq 1} n a_n (x + iy)^{n-1}$ converge, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $D(0, R)$.

De même $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et continue sur $D(0, R)$.

Ainsi f est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, R)$ et $\forall (x, y) \in D(0, R)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} i n a_n (x + iy)^{n-1}.$$

Alors par récurrence f est de classe \mathcal{C}^p sur $D(0, R)$ pour tout $p \geq 0$, alors f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $D(0, R)$.

27. Par application de la question précédente : $\forall (x, y) \in D(0, R)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (x + iy)^{n-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} -n(n-1) a_n (x + iy)^{n-2},$$

alors $\Delta(f) = 0$ sur $D(0, R)$.

Or $\Delta(f) = \Delta(u) + i\Delta(v) = 0$, et $\forall (x, y) \in D(0, R)$; $\Delta(u)(x, y) \in \mathbb{R}$, $\Delta(v)(x, y) \in \mathbb{R}$

Donc $\Delta(u) = \Delta(v) = 0$ sur $D(0, R)$, donc u et v sont harmoniques sur $D(0, R)$.

28. f ne s'annule pas sur $D(0, R)$ et f est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, R)$, donc $\forall (x, y) \in$

$D(0, R)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. Or $\forall (x, y) \in D(0, R)$

$$\frac{\partial(1/f)}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{f^2(x, y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ et } \frac{\partial(1/f)}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{f^2(x, y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Donc $\forall (x, y) \in D(0, R)$, $\frac{\partial(1/f)}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial(1/f)}{\partial x}(x, y)$, par conséquent d'après

le résultat admis $\frac{1}{f}$ se développe en série entière sur $D(0, R)$.

29. On a : $\frac{\partial(uv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$

De même $\frac{\partial(uv)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} v + u \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$, alors

$\Delta(uv) = \Delta(u)v + u\Delta(v) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ car u et v sont harmoniques sur $D(0, R)$.

Or f se développe en série entière sur $D(0, R)$, alors $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$

Ce qui se traduit par $\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}$

Donc $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, alors $\Delta(uv) = 0$, alors uv est harmonique sur $D(0, R)$.

Un autre raisonnement possible : On a f^2 est de classe \mathcal{C}^1 et $\frac{\partial f^2}{\partial x} = 2f\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f^2}{\partial y} = 2f\frac{\partial f}{\partial y}$

Or f se développe en série entière sur $D(0, R)$, donc $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$, donc

$\frac{\partial f^2}{\partial y} = i\frac{\partial f^2}{\partial x}$, alors f^2 se développe en série entière sur $D(0, R)$ et $f^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$, par application de la question 27, la fonction uv est harmonique sur $D(0, R)$.

Question au lecteur. Que pensez vous du raisonnement suivant ?

Par produit de Cauchy le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n z^n$ par elle même est supérieur ou égale à R , donc f^2 se développe en série en série entière sur $D(0, R)$.

Or $f^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$, par application de la question 27), la fonction uv est harmonique sur $D(0, R)$.

IV.C

30. g est de classe \mathcal{C}^2 sur $D(0, R)$, donc h est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, R)$, et sur $D(0, R)$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

Or g est harmonique sur $D(0, R)$, donc $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$, du coup $\frac{\partial h}{\partial y} = i\frac{\partial h}{\partial x}$ sur $D(0, R)$ par le théorème de Schwartz. Donc h se développe en série entière sur $D(0, R)$.

31. Posons alors $h(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x + iy)^n$ et comme indiqué $H(x, y) = \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1}(x + iy)^{n+1}$ pour tout $(x, y) \in D(0, R)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1} z^{n+1}$ ont un rayon de convergence au moins égal à R , par application de la question 26), H est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, R)$ et $\forall (x, y) \in D(0, R)$, $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x + iy)^n = h(x, y)$, $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x + iy)^n = ih(x, y)$.

Donc $\forall (x, y) \in D(0, R)$, $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$.

Donc par application de la question 30), la fonction H se développe en série entière sur $D(0, R)$.

Si u et v les parties réelle et imaginaire de H , alors $\forall (x, y) \in D(0, R)$, $H(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, alors sur $D(0, R)$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = h(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = ih(x, y) = i \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$, par conséquent $\frac{\partial(g-u)}{\partial x} = \frac{\partial(g-u)}{\partial y} = 0$, $D(0, R)$ est un convexe, donc $g - u$ est constante sur $D(0, R)$.

Or $H(0, 0) = \alpha \in \mathbb{R}$, donc $H(0, 0) = u(0, 0)$, et pour avoir $u = g$ on prend $\alpha = g(0, 0)$.

32. Pour $0 < r < R$ on a $\int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} dt$.

Les applications $t \mapsto a_n r^n e^{int}$ sont continues sur $[0, 2\pi]$ et la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{int}$ converge normalement donc uniformément sur

$[0, 2\pi]$ car $\sum_n |a_n| r^n$ converge, alors $\int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{int} dt$,

mais $\int_0^{2\pi} e^{int} = 0$ pour tout $n \neq 0$, alors $\int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt = a_0 2\pi = 2\pi f(0, 0) = 2\pi f(0)$.

Et pour $r = 0$ le résultat est évident.

33. Soit $g \in \mathcal{H}(D(0, R))$, par la question 31) $\exists H$ se développant en série entière sur $D(0, R)$, telle que g est la partie réelle de H . Posons $H = g + i g_0$. D'après la partie IV.A les deux fonctions g et g_0 sont harmoniques sur $D(0, R)$

Par la précédente précédente :

$$\begin{aligned} H(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(r \cos(t), r \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos(t), r \sin(t)) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_0(r \cos(t), r \sin(t)) dt \end{aligned}$$

$$\text{Or } H(0) = g(0) + i g_0(0) \text{ donc : } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos(t), r \sin(t)) dt = g(0).$$

34. L'application $t \mapsto f(r \cos(t), r \sin(t))$ est 2π -périodique et de la question 32), $|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r \cos(t), r \sin(t))| dt \leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(r \cos(t), r \sin(t))| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(r \cos(t), r \sin(t))|$.

35. D'après la question 33), si g est harmonique sur $D(0, R)$, alors $\forall r \in]0, R[$

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos(t), r \sin(t)) dt. \text{ Donc}$$

$$|g(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(r \cos(t), r \sin(t))| dt \leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} |g(r \cos(t), r \sin(t))| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(r \cos(t), r \sin(t))|.$$

36. $|f|$ possède un maximum en 0 sur $D(0, R)$, alors $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(r \cos(t), r \sin(t))| \leq |f(0)|$, alors d'après la question 34) : $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(r \cos(t), r \sin(t))| = |f(0)|$, donc $|f|$ est constante sur $D(0, R)$, donc $|f|^2 = u^2 + v^2$ aussi, donc $\Delta|f|^2 = 0$.

$$\text{Or } \Delta(|f|^2) = \Delta(u^2) + \Delta(v^2) = 2u\Delta(u) + v\Delta(v) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2, \text{ ainsi puisque } \Delta(u) = \Delta(v) = 0$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ et $D(0, R)$ est un convexe donc u et v sont constantes sur $D(0, R)$ donc f est constante sur $D(0, R)$.

37. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, on suppose que $\forall z \in \mathbb{C}; P(z) \neq 0$, alors $\frac{1}{P}$ est

bien défini sur \mathbb{C} , posons $P(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ avec $a_N \neq 0$, donc

$$|P(z)| = |z|^N \left| \sum_{n=0}^N a_n z^{n-N} \right| \text{ et}$$

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{n-N} \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| |z|^{n-N} = |a_0| \frac{1}{|z|^N} + |a_1| \frac{1}{|z|^{N-1}} + \dots + |a_{N-1}| \frac{1}{|z|}.$$

Et cette dernière quantité tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, alors $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$. Ainsi $\exists R > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \implies |P(z)| \geq 2|P(0)|$.

D'autre part l'application $z \mapsto P(z)$ est continue sur \mathbb{C} donc bornée et atteint ses bornes sur le compact $B_f(0, R)$, alors

$\exists z_0 \in B_f(0, R)$ tel que $\forall z \in B_f(0, R), |P(z_0)| \leq |P(z)|$.

Alors $\forall z \in B_f(0, R), \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{|P(z_0)|}$. Mais $0 \in B_f(0, R)$, donc $\frac{1}{|P(0)|} \leq \frac{1}{|P(z_0)|}$, or sur le complémentaire de $B_f(0, R)$, on a :

$$\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{2|P(0)|} \leq \frac{1}{2|P(z_0)|} < \frac{1}{|P(z_0)|}, \text{ donc } \forall z \in \mathbb{C}, \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{|P(z_0)|}.$$

Posons $z_0 = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x, y) = \frac{1}{P(x + a + i(y + b))}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

l'application $(x, y) \mapsto P(x + a + i(y + b))$ se développe en série entière sur n'importe quelle boule de \mathbb{R}^2 , en particulier sur $D(0, 1)$ (Ici avec un changement de la définition de se développe en série entière, mais la démonstration de la question 26 reste la même) et elle ne s'annule pas, donc par application de la question 28), f se développe en série entière sur $D(0, 1)$ aussi, comme :

$$\forall (x, y) \in D(0, 1), |f(x, y)| = \frac{1}{|P(x + a + i(y + b))|} \leq \frac{1}{|P(a + ib)|} = |f(0, 0)|$$

Par application de la question 36), f est donc constante sur $D(0, 1)$ et aussi $\forall (x, y) \in D(0, 1) P(x + a + i(y + b)) = P(a + ib) = P(z_0)$, ou bien $\forall z \in D(0, 1)$ de $\mathbb{C}, P(z) = P(z_0)$, alors le polynôme $P - P(z_0)$ possède une infinité de racines donc nul, alors P est constant, ce qui est absurde.

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de \mathbb{R}^2

38. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} &= \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \\
 &= (1 + ze^{-it}) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-int} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-int} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} e^{-i(n+1)t} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-int} + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n e^{-int} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-int} z^n
 \end{aligned}$$

Donc $z \mapsto \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$ est développable en série entière pour $|z| < 1$.

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} h(t) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-int} z^n \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-int} z^n h(t) dt$$

h est bornée par une constante M sur $[0, 2\pi]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto 2e^{-int} z^n h(t)$ est continue sur $[0, 2\pi]$, de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, $|2e^{-int} z^n h(t)| \leq 2M|z|^n$ et la série $\sum_n |z|^n$ converge ; on peut intervertir le signe somme et

$$\text{intégrale et } g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} 2z^n \int_0^{2\pi} e^{-int} h(t) dt$$

d'après la partie IV.A l'application $(x, y) \mapsto g(x + iy)$ qui partie réelle d'une fonction qui se développe en série entière sur $D(0, R)$ est une fonction harmonique sur $D(0, R)$.

39. On a pour $|z| < 1$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt = 1 + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} 2z^n \int_0^{2\pi} e^{-int} dt = 1$
 car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} e^{-int} dt = 0$ l'interversion est justifié dans la question précédente.

40. L'application $t \mapsto h(t)\mathcal{P}(t, z)$ est 2π -périodique, donc $\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t, z) dt =$
 $\int_{\varphi}^0 h(t)\mathcal{P}(t, z) dt + \int_0^{2\pi} h(t)\mathcal{P}(t, z) dt + \int_{2\pi}^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t, z) dt$

Avec le changement $t - 2\pi = u$, $\int_{2\pi}^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t, z)dt = \int_0^{\varphi} h(t)\mathcal{P}(t, z)dt$,
d'où le résultat.

41. Pour $r \in [0, 1[$ et $t, \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t, z) &= \operatorname{Re} \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{(e^{it} + re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta})}{(e^{it} - re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta})} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1 - r^2 + 2ri \sin(\theta - t)}{1 + r^2 - 2r \cos(t - \theta)} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(t - \theta)}\end{aligned}$$

42. Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r \in]0, 1[$, la question demande de montrer que :

$$\lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, \varphi)} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \mathcal{P}(t, z)dt = 0$$

$$\text{Posons } u = t - \varphi, \text{ alors } \int_{\varphi+\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \mathcal{P}(t, z)dt = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(u + \varphi - \theta)} du$$

J'ai essayer le calcul de l'intégral par l'intermédiaire de tan, c'est trop long.

J'ai essayer une bonne majoration ça n'a rien donné. J'attend ?

43. Le même raisonnement de la question 40 donne $\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \mathcal{P}(t, z)dt = 1$
pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$.

Alors $h(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} h(\varphi)\mathcal{P}(t, z)dt$, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

$|g(z) - h(\varphi)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} |h(t) - h(\varphi)|\mathcal{P}(t, z)dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, car $\mathcal{P}(t, z) \geq 0$.

h est continue sur le compact $[\varphi - \pi, \varphi + \pi]$, donc uniformément continue,
Pour $\varepsilon > 0$, $\exists \delta \in]0, \pi[$, $|t - \varphi| \leq \delta \implies |h(t) - h(\varphi)| \leq \varepsilon$, alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} |h(t) - h(\varphi)|\mathcal{P}(t, z)dt \leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z)dt \leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} \mathcal{P}(t, z)dt =$$

$$\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t, z)dt = \varepsilon$$

$$\text{Et } \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} |h(t) - h(\varphi)|\mathcal{P}(t, z)dt \leq \frac{2\|h\|_{\infty}}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \mathcal{P}(t, z)dt$$

En rassemblant les deux inégalités précédentes avec $a = \varphi - \delta$, on obtient l'inégalité demandée.

44. Si f_1 et f_2 sont deux solutions du problème de Dirichlet, alors elles sont égales sur le bord de $D(0, 1)$ par application de la question 25, $f_1 = f_2$ sur $D(0, 1)$, donc $f_1 = f_2$ sur $\overline{D(0, 1)}$.

D'après la question 38) l'application $(x, y) \mapsto g(x + iy)$ vérifie $\Delta(g) = 0$ sur $D(0, 1)$.

Ceci nous oblige à considérer l'application $f(x, y) = g(x, y)$ sur $D(0, 1)$ et $f(\cos(t), \sin(t)) = h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Cette fonction f est bien de classe \mathcal{C}^2 sur $D(0, 1)$ et $\Delta(f) = 0$ sur $D(0, 1)$.

Reste à montrer qu'elle est continue sur $\overline{D(0, 1)}$, question que je laisse au lecteur.

Pour vos remarques ...

sadikoulmeki@gmail.com