GCCP 2002 - Epreuve de mathémaiques 1- MP- Corrigé

Par M. TAIBI Professeur de MP* Lycée Moulay Youssef Rabat Maroc

---

Partie I : Généralités et exemples

1- Si $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$, et comme les u_k sont des réels non nuls, alors $\frac{p_{n+1}}{P_n} = u_n$
Si $P_n)_n$ converge vers un réel ℓ ($\ell \neq 0$ par définion de la convergence de $(P_n)_n$), alors $\left(u_n = \frac{p_{n+1}}{P_n}\right)_n$ converge vers 1.

2- Ici $(u_n)_n$ est une site de réels qui converge vers 1 :

a) Par définition de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ et pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $|u_n - 1| \leqslant \varepsilon = \frac{1}{2}$. Donc : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) Pour n entier $\geqslant n_0$, écrivons $\prod\limits_{k=0}^{n} u_k = \left(\prod\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k\right)\left(\prod\limits_{k=n_0}^{n} u_k\right)$. La quantité $\prod\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k$ est un réel non nul et ne dépond pas de n, donc les suites $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ et $\left(\prod\limits_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature.

3- Ici $u_n > 0$ pour tout n.

a) Pour tout $n \in N$, on a : $\ln(P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} u_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(u_k)$.
Donc $(P_n)_n$ converge vers $\ell > 0$ $\Leftrightarrow (\ln(P_n))_n$ conerge vers e^{ℓ}
$\Leftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(u_n)$ converge

b) $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} (1+u_k)\right)_n$ converge $\Leftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ converge.
On sait que, lorsque $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} (1+u_k)\right)_n$ converge, $u_n \to 1$, et par suite $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et $u_n > 0$, d'où $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ converge $\Leftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

c) On suppose ici $0 < u_n < 1$:
Si $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} (1-u_k)\right)_n$ converge, alors $\sum \ln(1-u_n)$ converge . Mais $u_n \to 0$ donc $\ln(1-u_n) \sim -u_n$ et $-u_n < 0$ pour tout n et apr suite $\sum u_n$ converge.
Réciproquement : Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$ et puis $\ln(1-u_n) \sim -u_n$, donc $\sum \ln(1-u_n)$ converge. Mais $1 - u_n > 0$ pour tout n, donc-question I-3- la suite $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} (1-u_k)\right)_n$ converge.

4- Nature des produits infinis

a) Ici $u_n = \frac{1}{4n^2} \in]0;1[$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\sum u_n$ converge (comparaison à une série de Riemann).Donc $\prod\limits_{n\geqslant 1} (1-u_n)$ converge.

b) Ici $u_n = \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \in]0;1[$ pour tout $x \in]-\pi,\pi[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum u_n$ converge (comparaison à une série de Riemann).Donc $\prod\limits_{n\geqslant 1} (1-u_n)$ converge.

c) $u_n = (1+\frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}} > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\ln(u_n) = -\frac{x}{n} + \ln(1+\frac{x}{n})$. Pour $x > 0$ fixé, un développement limité donne : $\ln(u_n) = -\frac{x}{n} + (\frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2})) = O(\frac{1}{n^2})$ et par suite $\sum \ln(u_n)$ est convergente (même absolument convergente). Par la question I-3-a), le produit $\prod\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

5- Application

a) On a : $\frac{1}{n} \sim \ln(1+\frac{1}{n})$, mais $\prod\limits_{k=1}^{n} (1+\frac{1}{k}) = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1 \to +\infty$, donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

b) Si $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, alors $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$ (série géometrique de raison $\frac{1}{p} \in]0,1[$).

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $P_n = \frac{1}{(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1\frac{1}{p_n})}$, on a : $\ln(P_n) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1-\frac{1}{p_k})$. Comme $p_n \to +\infty$, on a : -$\ln(1-\frac{1}{p_n}) \sim \frac{1}{p_n}$. Mais $P_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots \geqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ où N entier tel que $p_n \leqslant N < p_{n+1}$, donc $(P_n)_n$ diverge. et par suite $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

Partie II : Développement eulérien du sinus et formule de Wallis

6- f_α est 2π-périodique et tel que $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$ si $t \in [-\pi, \pi]$, on a alors : f_α est continue sur R et de calsse C^1 par morceaux, donc développable en série de fourier : $f_\alpha(t) = \frac{a_0(f_\alpha)}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(a_{n(f_\alpha)} \cos(nt) + b_n(f_\alpha)\sin(nt)\right)$ pour tout $t \in R$.
f_α étant paire, donc $b_n(f_\alpha) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Mais $a_0(f_\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_\alpha(t)dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f_\alpha(t)dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(\alpha t)dt = \frac{2}{\pi\alpha}\left[\sin(\alpha t)\right]_{t=0}^{t=\alpha} = \frac{2\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$. et pour $n \geqslant 1$: $a_n(f_\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(\alpha t)\cos(nt)dt = -\frac{2}{\pi(-\alpha^2+n^2)}\alpha \sin\pi\alpha\cos\pi n + \frac{2}{\pi(-\alpha^2+n^2)} n \cos\pi\alpha \sin\pi n = \frac{2\alpha(-1)^n}{\pi(\alpha^2-n^2)}\sin(\alpha\pi)$.
Donc $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $\cos(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha(-1)^n}{\pi(\alpha^2-n^2)} \sin(\alpha\pi)\cos(nt)$, en particulier pour $t = \pi$, on a :

$$\frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

7- Soit $x \in]0, \pi[$ fixé et $g(t) = \begin{cases} \cot an(t) - \frac{1}{t} \text{ si } t \in]0, x] \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$.
Pour $t \in]0, x[$, $\quad g(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{=} \frac{1-t^2/2+o(t^2)}{t-o(t^3)} - \frac{1}{t} \quad = \frac{1}{t}\left[\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\left(1 - o(t^2)\right) - 1\right]$
$= -\frac{t}{2} + o(t)$
Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 0 = g(0)$ et par suite g est continue sur $[0, x]$.
La fonction $t \mapsto \ln(\sin(t)) - \ln(t)$ est une primitive de g sur $]0, x]$, donc pour $\alpha \in]0, x]$, on a : $\int_\alpha^x g(t)dt = \ln(\sin(x)) - \ln(x) - \ln(\sin(\alpha)) + \ln(\alpha)$.
Or $\ln(\sin\alpha) - \ln(\alpha) = \ln(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + o(\alpha^3)) - \ln(\alpha) = \ln(1 - \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2)) \underset{\alpha\to 0}{\sim} \frac{\alpha^2}{2}$.
Donc

$$\int_0^x g(t)dt = \ln(\sin x) - \ln(x) = \ln(\frac{\sin(\alpha)}{x})$$

b) Pour $t \in]0, x]$, avec $\alpha = \frac{t}{\pi}$, on a : $\alpha \in [0, \frac{x}{\pi}] \subset [0, 1]$ et $\cot an(t) = \cot an(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}$, donc $g(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)} = \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{\pi(\frac{t^2}{\pi^2}-n^2)} = 2t\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(t^2-n^2\pi^2)}$ relation qui reste valable pour $t = 0$.

c) D'après I- la série $\sum \ln(\frac{n^2\pi^2-x^2}{n^2\pi^2})$ est convergente et $\ln\left(\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(\frac{n^2\pi^2-x^2}{n^2\pi^2})$.
La série d'applications $t \mapsto \frac{2t}{(t^2-n^2\pi^2)}$ convege normalement (donc unformément) sur $[0, x]$, pour $x \in]0, \pi[$ car $\left|\frac{2t}{(t^2-n^2\pi^2)}\right| \leqslant \frac{2x}{n^2\pi^2-x^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2\pi^2}$ et $\sum \frac{2x}{n^2\pi^2}$ converge. Le théorème d'interversion des symboles $\int$ et $\sum$ s'applique et on a :

$$\int\limits_0^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_0^x \frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln(n^2\pi^2 - t^2)\right]_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(n^2\pi^2 - x^2) - \ln(n^2\pi^2)\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})$$
$$= \ln\left(\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})\right)$$

Donc $\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}) = e^{\int_0^x g(t)dt}$ et par $\int_0^x g(t)dt = \ln(\frac{\sin x}{x})$, on a :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}) = \frac{\sin x}{x}$$

8- Application : Pour tout $x = \frac{\pi}{2} \in]0,\pi[$, par la question I-......., on a : $\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{4n^2}) = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$

Partie III : Formule de Weierstrass et constante d'Euler

9- Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé.

a) L'application $f : t \mapsto e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est positive et continue sur $]0,+\infty[$
Lorsque $t \to 0^+$: $e^{-t}t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$, donc f est intégrable au voisinage de 0^+ ssi $1-x<1$ ssi $x>0$
Lorsque $t \to +\infty$: $t^2e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}t^{x+1} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
En conclusion : pour tout $x \in]0,+\infty[$ l'application f est intégarble sur $]0,+\infty[$.

b) Avec $\Gamma(x) = \int_{]0,+\infty[} e^{-t}t^{x-1}dt$, on a : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

c) L'applcation $g : (x,t) \mapsto e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est de classe C^1 (même C^∞) sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et pour tout $x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$,
$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\ln(t).e^{-t}t^{x-1}\right| \leqslant |\ln(t)|\,e^{-t}\max(t^{a-1},t^{b-1}) \leqslant \underbrace{|\ln(t)|\,e^{-t}t^{a-1} + |\ln(t)|\,e^{-t}t^{b-1}}_{=\varphi(t)}$ et
$\varphi \in L^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}_+)$ (somme de deux fonctions intégrables...)
Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, on a : Γ est de classe C^1 sur l'ouvert $]0,+\infty[$ et $\Gamma'(x) = \int_{]0,+\infty[} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt$

10- Pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n\chi_{[n,+\infty[}(t)$, $t \in]0,+\infty[$ où $\chi_{[n,+\infty[}$ est la fonction caractéristique de l'intérvalle $[n,+\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $t \in]0,+\infty[$, posons $g_t(u) = \begin{cases} (1-\frac{t}{u})^u = e^{u\ln(1-\frac{t}{u})} & \text{si } u>t \\ 0 & \text{si } 0<u\leqslant t \end{cases}$, on a : $g_t'(u) = \left(\ln(1-\frac{t}{u}) + \frac{t}{u-t}\right)e^{u\ln(1-\frac{t}{u})}$: pour tout $t \in]0,n]$:
Or $\frac{d}{du}\left(h(u) = \ln(1-\frac{t}{u}) + \frac{t}{u-t}\right) = \frac{t}{u^2\left(1-\frac{t}{u}\right)} - \frac{t}{(u-t)^2} = -\frac{t^2}{u(-u+t)^2} < 0$
on a donc

u	t		$+\infty$
$h'(u)$		$-$	
$h(u)$		$\searrow$	0
$g'_t(u)$		$+$	
$g_t(u)$		$\nearrow$	

,

En particulier $(f_n(t))_n$ est croissante et comme $\lim_{n\infty} f_n(t) = e^{-t}$, on a : $e^{-t} - f_n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

b) Soit $x>0$ fixé. La sute de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $t \mapsto e^{-t}$, et dominée par $t \mapsto e^{-t}$, donc la suite $(g_n : t \mapsto f_n(t)t^{x-1})_n$ converge simplement vers $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ et dominée par $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par application du théorème de convergence dominée, on a :
$\lim_{n\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \lim_{n\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)t^{x-1}dt = \int_0^{+\infty}\lim_{n\infty} f_n(t)t^{x-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x)$.

11- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x>0$, on pose : $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les applications $V : u \mapsto (1-u)^n$ et $U : u \mapsto \frac{1}{x}u^x$ sont continue sur $[0,1]$ et de de classe C^1 sur $]0;1]$, donc une intégration par parties dans $I_n(x)$ donne :

$$\begin{aligned} I_n(x) = \int_0^1 V(u)U'(u)du &= [(UV)(u)]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 V'(u)U(u)du \\ &= \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x du \\ &= \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) \end{aligned}$$

b) Avec $I_0(t) = \int_0^1 (1-u)^0 u^{t-1} du = \dfrac{1}{t}$ pour tout $t > 0$, on a : $I_n(x) = \frac{n}{n}\frac{n-1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}I_0(x+n) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$ (récurrence sur n). D'où

$$I_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$

c) Le changement de variable linéaire $u = \frac{t}{n}$ dans l'intégrale $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$ donne :
$\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n n^{x-1} u^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x I_n(x) = \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$

12- Application :

a) Soit $x \in]0;1[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n! n^x}\frac{\prod_{k=0}^{n}(1-x+k)}{n! n^{1-x}} &= \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)\prod_{k=1}^{n+1}(-x+k)}{n.(n!)^2} \\ &= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n}(k^2-x^2)\right)x(n+1-x)}{n.(n!)^2} \\ &= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)^2 \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2})x(n+1-x)}{n.(n!)^2} \qquad \text{car } \prod_{k=1}^{n} k = n! \\ &= \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2})\underbrace{\frac{x(n+1-x)}{n}}_{\downarrow n\to\infty \atop x} \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on en déduit :

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})$$

b) Soit $x \in]0,1[$, avec $t = x\pi \in]0,\pi[$, on a : $\frac{1}{x\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})} = \frac{1}{\frac{t}{\pi}\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{t^2}{k^2\pi^2})} = \dfrac{1}{\frac{\sin(t)}{\pi}} = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ et par suite $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})} = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

c) On sait que $\int_0^{n^2} (1-\frac{t^2}{n})^n t^{x-1} dt \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{x-1} dt$. Avec le changement de variable $t \mapsto u = t^2$

(C^1-difféomorphisme de $]0,n^2]$ sur $]0,n]$), on a : $\int\limits_0^{n^2}(1-\frac{t^2}{n})^n t^{x-1}dt \;=\int\limits_0^{n}(1-\frac{u}{n})^n u^{\frac{1}{2}(x-1)}\frac{du}{u}$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{n}(1-\frac{u}{n})^n u^{\frac{1}{2}(x-1)}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{n}(1-\frac{u}{n})^n u^{\frac{1}{2}x-1}du$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{n^2}(1-\frac{t^2}{n})^n t^{x-1}dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}x)$ et par unicité de la limite, on a : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{x-1}dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}x)$

Pour $x=1$, on obtient : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$.

Or $\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin(\pi.\frac{1}{2})} = \pi$, d'où $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

13- Constante d'Euler : Pour $n \geqslant 2$, $u_n = \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t}dt - \frac{1}{n}$

a) On a : $u_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = -\left(\ln(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\right) = -\left(-\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) + \frac{1}{n}\right) = O(\frac{1}{n^2})$, et par comparaison de séries, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc converge.

b) Pour $n \geqslant 2$, $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \int\limits_{k-1}^{k}\frac{1}{t}dt\right) = 1 - \sum\limits_{k=2}^{n}u_k$. Comme la série $\sum u_n$ converge, il en est de même que la suite (v_n).
On pose $\lim_n v_n = \gamma$.

14- Formule de Veierstrass :
Pour $x>0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{n!.n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)} = \dfrac{e^{x\ln(n)}}{x\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k})}$. Mais

$e^{-x\ln(n)} = e^{-x(-\gamma+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+o(1))} \sim e^{x\gamma}\prod\limits_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}}$.

Donc $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = \lim_n \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}{n!.n^x} = \lim\left(x\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k})\right)e^{-x\ln(n)} \;= xe^{x\gamma}\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{x}{k})\prod\limits_{k=1}^{+\infty}e^{-\frac{x}{k}}$

$$= xe^{x\gamma}\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{x}{k})e^{-\frac{x}{k}}$$

15- Application :

a) Pour tout $x \in]0;1]$; $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+x)}$, en effet :
$-\ln(\Gamma(x)) = \ln(\frac{1}{\Gamma(x)}) = \ln\left(xe^{x\gamma}\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{x}{k})e^{-\frac{x}{k}}\right) = \ln(x) + x\gamma + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\ln(1+\frac{x}{k}) - \frac{x}{k}\right)$.
Or les applications $h_n : x \mapsto \ln(1+\frac{x}{k}) - \frac{x}{k}$ sont de classe C^1 sur $]0,1]$, avec $h_n'(x) = -\frac{x}{k(k+x)}$ et la série d'applications $\sum\limits_{k\geqslant 1}h_n'$ converge localement uniformément sur $]0,1]$, donc le théorème de dérivation terme à terme permet d'écrire :
$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(\ln(1+\frac{x}{k}) - \frac{x}{k}) = \frac{1}{x} + \gamma - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(k+x)}$ et par suite

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k\,(k+x)}$$

b) D'après la question III-9-c), on a : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t) = \Gamma(1)$ et par III-15-a), on a :
$\Gamma'(1) = \Gamma(1)\left(-1-\gamma+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\right)$. Mais $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, donc $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1$
et par suite $\Gamma'(1) = -\gamma\Gamma(1) = -\gamma$.

En conclusion :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t) = -\gamma$$