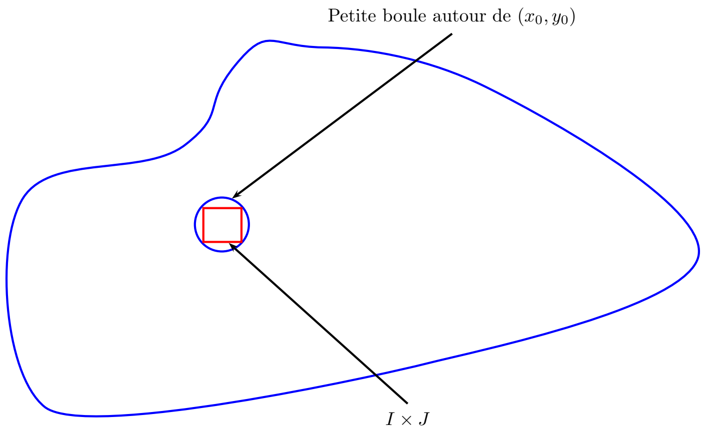
Centrale Maths PSI 2

I. Résultats préliminaires

I.A.1.a) L'ensemble Ω est un ouvert non vide. Soit (x_0, y_0) un point de Ω, il existe $r > 0$ tel que $D((x_0, y_0), r) \subset \Omega$. Pour $r' = \frac{r}{\sqrt{2}}$ si $(x, y) \in]x_0 - r', x_0 + r'[\times]y_0 - r', y_0 + r'[$ alors $|x - x_0| \leq r'$ et $|y - y_0| \leq r'$ de telle sorte que

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 2r'^2 = r^2$$

et donc $]x_0 - r', x_0 + r'[\times]y_0 - r', y_0 + r'[\subset D((x_0, y_0), r)$ d'où la conclusion avec $I =]x_0 - r', x_0 + r'[$ et $J =]y_0 - r', y_0 + r'[$.



I.A.1.b) La fonction polynômiale P s'écrit sous la forme $\sum_{\substack{k+l \leq m \\ k,l \geq 0}} a_{k,l} x^k y^l = \sum_{l=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{m-l} a_{k,l} x^k \right) y^l$. On note alors $P_l(x) = \sum_{k=0}^{m-l} a_{k,l} x^k$ pour écrire que $P(x, y) = P_0(x) + P_1(x)y + \ldots + P_m(x)y^m$.

Vu a), il existe I, J deux intervalles ouverts non vides tels que $I \times J \subset \Omega$

- Pour chaque $x \in I$, le polynôme $P_0(x) + P_1(x)y + \ldots + P_m(x)y^m$ s'annule pour tout $y \in J$ donc possède une infinité de racines donc est le polynôme nul de sorte que $P_0(x) = \ldots = P_m(x) = 0$
- Pour chaque $x \in I$, $P_0(x) = \ldots = P_m(x) = 0$ donc chaque polynôme P_i possède une infinité de racines donc est le polynôme nul et par conséquent $a_{k,l} = 0$ pour tous les indices k, l

Bilan, P est bien le polynôme nul.

I.A.2) Ce résultat ne subsiste pas. La fonction polynômiale $P(x, y) = x - y$ s'annule sur la partie infinie $\Omega = \{(n, n)/n \in \mathbb{N}\}$ sans être la fonction nulle.

I.B.1) Le polynôme $P \in \mathcal{P}_m$ si et seulement si P est une combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}_m = (x^k y^l)_{\substack{k+l \leq m \\ k,l \in \mathbb{N}}}$ donc $\mathcal{P}_m = \text{Vect}\left((x^k y^l)_{\substack{k+l \leq m \\ k,l \in \mathbb{N}}} \right)$. Or la famille $\mathcal{F}_m$ est de cardinal fini et vu IA1 cette famille est libre donc la dimension de $\mathcal{P}_m$ est le cardinal de cette famille.

Nous devons donc dénombrer les couples $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k + l \leq m$.

- Nombre de tels couples avec $k = 0$: $m + 1$ $(l = 0, 1, \ldots, m)$
- Nombre de tels couples avec $k = 1$: m
- $\vdots$
- Nombre de tels couples avec $k = m$: 1

Total $1 + \ldots + (m + 1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ donc $\dim(\mathcal{P}_m) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$

I.B.2) Le polynôme $P_1(x, y) = x$ est de degré 1 et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_{11} P_1(x, y) + \partial_{22} P_1(x, y) = 0 + 0 = 0$ donc P_1 est un polynôme harmonique. Le polynôme $P_2(x, y) = x^2 - y^2$ est de degré 2 et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_{11} P_2(x, y) + \partial_{22} P_2(x, y) = 2 - 2 = 0$ donc P_2 est un polynôme harmonique.

I.B.3.a) L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à P associe ΔP est une application linéaire (propriété de linéarité de ∂_{11} et ∂_{22}). L'ensemble des polynômes harmoniques, que nous noterons $\mathcal{H}$, est $\text{Ker}(\Delta)$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

I.B.3.b) La famille $\mathcal{F}_m = (x^k y^l)_{\substack{k+l \leq m \\ k,l \in \mathbb{N}}}$ est libre d'après $I.A.1.b$ et est génératrice de $\mathcal{P}_m$, donc est une base de $\mathcal{P}_m$. Pour tout $P \in \mathcal{P}_m$, $\Delta_m P \in \mathcal{P}_{m-2}$ donc $\text{Im}(\Delta_m) \subset \mathcal{P}_{m-2}$, par suite

- d'après le théorème du rang $\dim(\mathcal{P}_m) = \text{rg}(\Delta_m) + \dim \text{Ker}(\Delta_m)$

- $\mathrm{rg}(\Delta_m) \leq \dim(\mathcal{P}_{m-2})$

donc,

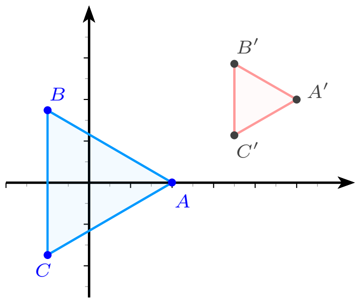
$$\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_m) \geq \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\mathcal{P}_{m-2}) = \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = 2m+1$$

I.B.3.c) Par l'absurde si $\mathcal{H}$ est de dimension finie alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, comme $\mathrm{Ker}(\Delta_m) \subset \mathcal{H}$ on a $2m+1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(\Delta_m)) \leq \dim(\mathcal{H})$ ce qui est absurde car la suite $(2m+1)_m$ n'est pas majorée. Par conséquent l'espace vectoriel $\mathcal{H}$ est de dimension infinie.

I.C) Le polynôme $P(x, y) = xy$ vérifie $\Delta P = 0$ donc est un polynôme harmonique et $P_{|\mathcal{C}(0,1)} = f$ donc P convient.
Il est clair que $f(x, y) = x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)) = x^2 - y^2$ pour $(x, y) \in \mathcal{C}(0, 1)$, le polynôme $P(x, y) = x^2 - y^2$ est harmonique et $P_{|\mathcal{C}(0,1)} = f$ donc le polynôme P convient.

II. Quelques exemples d'applications harmoniques

II. A) La transformation $(x, y) \longmapsto \lambda(x, y) + (x_0, y_0)$ est une homothétie, donc l'image d'un triangle est un triangle dont les sommets sont les images des sommets du triangle initial. Sur la figure, le triangle ABC et son image, le triangle $A'B'C'$.



II. B.1) Comme les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, et que f est une fonction $\mathcal{C}^2$ le théorème de Schwartz implique que $\partial_{21} f = \partial_{12} f$ et $\partial_{221} f = \partial_{212} f = \partial_{122} f$ donc $\Delta\partial_1 f = \partial_1(\partial_{11} f) + \partial_1(\partial_{22} f) = \partial_1(\Delta f) = 0$ donc $\partial_1 f$ est une fonction harmonique, il en est de même pour $\partial_2 f$.

II. B.2) Notons f_{λ,x_0,y_0} la transformation $(x, y) \longmapsto (x_0, y_0) + \lambda(x, y)$.

- si $\lambda = 1$ alors on reconnaît une translation de vecteur (x_0, y_0)
- si $\lambda \neq 1$ et si $(x_C, y_C) = (\frac{x_0}{1-\lambda}, \frac{y_0}{1-\lambda})$ alors f_{λ,x_0,y_0} est une homothétie de centre (x_C, y_C) et de rapport λ.

Soit $(x', y') \in \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$. Il existe donc $(x, y) \in \Omega$ tel que $(x', y') = f_{\lambda,x_0,y_0}(x, y)$. Comme Ω est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $D((x, y), r) \subset \Omega$ et donc $f_{\lambda,x_0,y_0}(D((x, y), r)) \subset \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$. Or, f_{λ,x_0,y_0} est une homothétie ou une translation et l'image du disque ouvert $D((x, y), r)$ est un disque ouvert de centre (x', y') ce qui prouve que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est un ouvert.
On peut aussi observer que dans tous les cas f_{λ,x_0,y_0} est une bijection, f^{-1}_{λ,x_0,y_0} est une translation si $\lambda = 1$ ou une homothétie si $\lambda \neq 1$, donc f^{-1}_{λ,x_0,y_0} est une fonction continue et $\Omega_{x_0,y_0,\lambda} = {f^{-1}_{\lambda,x_0,y_0}}^{-1}(\Omega)$ est un ouvert comme préimage d'un ouvert par une fonction continue.
Il semblerait cependant que chacun de ces raisonnements soit hors programme et un retour à la définition quoique possible me semble exclu pour des élèves de cette filière.

II. B.3) En conservant les notations de l'énoncé, en notant $\varphi : (x, y) \longmapsto g(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$, pour $(x, y) \in \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$

- $\partial_1\varphi(x, y) = \lambda\partial_1 g(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$
- $\partial_{11}\varphi(x, y) = \lambda^2\partial_{11} g(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$ et de même $\partial_{22}\varphi(x, y) = \lambda^2\partial_{22} g(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$

Et donc $\Delta\varphi(x, y) = \lambda^2\Delta g(\lambda(x, y) + (x_0, y_0)) = 0$ donc φ est une fonction harmonique.

II. C.1) En conservant les notations de l'énoncé, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

- $\partial_1 h_1(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$ et $\partial_{11} h_1(x, y) = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2}$
- $\partial_2 h_1(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$ et $\partial_{22} h_1(x, y) = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2}$

et donc $\Delta h_1(x, y) = \frac{4}{x^2+y^2} - \frac{4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$ donc h_1 est une fonction harmonique $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Puis comme $h_2 = \frac{1}{2}\partial_1 h_1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et donc vu $IIB1$, h_2 est une fonction harmonique.

II. C.2) Pour $t \in \mathbb{R}$, en notant ψ_t l'application de l'énoncé, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\psi_t(x, y) = \frac{1 - (x^2 + y^2) - 1 - 2x\cos(t) - 2y\sin(t)}{x^2 + y^2} = \underbrace{-1}_{\in\mathcal{H}} - \underbrace{\frac{2\cos(t)x}{x^2 + y^2}}_{\in\mathcal{H}} - \underbrace{\frac{2\sin(t)y}{x^2 + y^2}}_{\in\mathcal{H}}$$

donc $\psi_t \in \mathcal{H}$.

II. D.1) Pour $(x,y) \in D(0,1)$ et $t \in \mathbb{R}$, $(x-\cos(t), y-\sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $N(x,y,t) = \psi_t(x-\cos(t), y-\sin(t))$. Or ψ_t est une fonction harmonique sur $\Omega_{-\cos(t),-\sin(t),1}$ (avec $\Omega = D(0,1)$) donc vu IIB3, la fonction N_t est harmonique sur $\Omega_{-\cos(t),-\sin(t),1}$.

II. D.2) La fonction $t \longmapsto N(x,y,t)$ est continue sur $[0,2\pi]$ comme sommes et quotients de fonctions continues (le dénominateur ne s'annule jamais).

II. D.3) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $z = x+iy$ avec $(x,y) \in D(0,1)$,

$$\begin{aligned}
-1 + \tfrac{\alpha}{1-ze^{-it}} + \tfrac{\beta}{1-\bar{z}e^{it}} &= \tfrac{-(1-ze^{-it})(1-\bar{z}e^{it})+\alpha(1-\bar{z}e^{it})+\beta(1-ze^{-it})}{(1-ze^{-it})(1-\bar{z}e^{it})} \\
&= \tfrac{6(1+|z|^2-2\mathrm{Re}(ze^{-it}))+\alpha+\beta-\alpha\bar{z}e^{it}-\beta ze^{-it}}{1+|z|^2-2\mathrm{Re}(ze^{-it}} \\
&= \tfrac{-1-x^2-y^2+2\mathrm{Re}(ze^{-it}))+\alpha+\beta-\alpha\bar{z}e^{it}-\beta ze^{-it}}{1-x^2-y^2-2x\cos(t)-2y\sin(t)}
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = \beta = 1$, on obtient que

$$-1 + \frac{\alpha}{1-ze^{-it}} + \frac{\beta}{1-\bar{z}e^{it}} = N(x,y,t)$$

II. D.4) Comme $(x,y) \in D(0,1)$, $|z| < 1$ donc pour tout $t \in [0,2\pi]$, $|ze^{-it}| = |\bar{z}e^{it}| = |z| < 1$ et par suite,

- $\frac{1}{1-ze^{-it}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k e^{-ikt}$ et $\frac{1}{1-\bar{z}e^{it}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{z}^k e^{ikt}$ et dans les deux cas il y a convergence normale donc uniforme sur le segment $[0,2\pi]$
- Le théorème d'interversion série intégrale s'applique donc et comme

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_0^{2\pi} e^{ikt}\,dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-ze^{-it}}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} z^k e^{-kt}\,dt = 2\pi$$

de même

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\bar{z}e^{it}}\,dt = 2\pi$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t)\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-ze^{-it}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\bar{z}e^{it}}\,dt = -1+1+1 = 1$$

III. Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

III.A.1.a) Soit $(x_0,y_0) \in D(0,1)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \times [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[\subset D(0,1)] \subset D(0,1)$

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto N_f(x,y_0,t)f(\cos(t),\sin(t))$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$

(b) Pour tout $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, les fonctions $t \longmapsto N(x,y_0,t)f(\cos(t),\sin(t))$ et $t \longmapsto \partial_1 N(x,y_0,t)f(\cos(t),\sin(t))$ sont continues sur le segment $[0,2\pi]$ donc intégrables.

(c) La fonction $(x,t) \longmapsto \partial_{11}N(x,y_0,t)f(\cos(t),\sin(t))$ est continue sur le fermé borné $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \times [0,2\pi]$ donc est bornée, par conséquent il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon], \forall t \in [0,2\pi], |\partial_{11}N(x,y_0,t)f(\cos(t),\sin(t))| \leq M$$

Le théorème de dérivation sous le signe somme (version itérée) prouve alors que la fonction $x \longmapsto N(x,y_0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, en particulier la fonction $N_f(x,y)$ possède une dérivée partielle seconde par rapport à x en (x_0,y_0), pour tout $(x_0,y_0) \in D(0,1)$ et

$$\partial_{11}N_f(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_{11}N(x_0,y_0,t)f(\cos(t),\sin(t))\,dt$$

et plus géralement pour tout indice $i,j \in \{1,2\}$,

$$\partial_{ij} N_f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{ij} N(x_0, y_0, t) f(\cos(t), \sin(t))\, dt$$

III.A.1.b) Par linéarité de l'intégrale, pour tout $(x, y) \in D(0, 1)$

$$\begin{aligned} \Delta N_f(x, y) &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} \partial_{11} N(x, y, t) f(\cos(t), \sin(t))\, dt + \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{22} N(x, y, t) f(\cos(t), \sin(t))\, dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} \Delta N(x, y, t) f(\cos(t), \sin(t))\, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

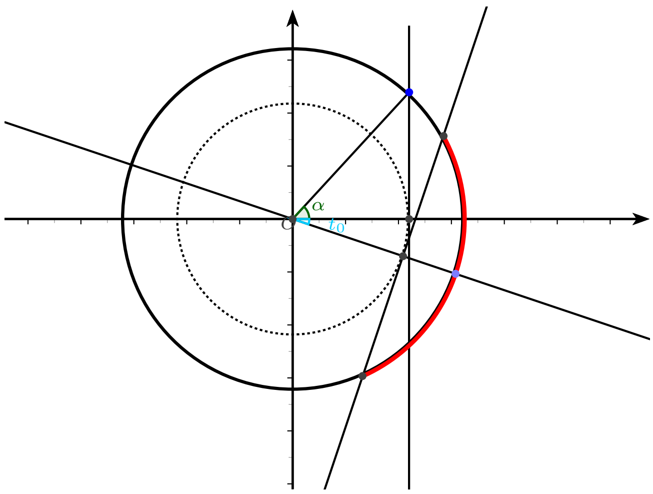
donc la fonction N_f (et par conséquent u) est harmonique sur $D(0, 1)$.

III.A.2.a) Pour $t \in \mathbb{R}$, $(\cos(t) - \cos(t_0))^2 + (\sin(t) - \sin(t_0))^2 = 2 - 2\cos(t - t_0)$. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$t \in I_0^\delta \iff (\cos(t) - \cos(t_0))^2 + (\sin(t) - \sin(t_0))^2 \leq \delta^2 \iff 1 - \frac{\delta^2}{2} \leq \cos(t - t_0)$$

Si $\delta \geq 2$ alors $1 - \frac{\delta^2}{2} \leq -1$ et $I_0^\delta = [0, 2\pi]$.

Si $0 < \delta < 2$ alors $1 - \frac{\delta^2}{2} \in [-1, 1]$ donc il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $1 - \frac{\delta^2}{2} = \cos(\alpha)$. Graphiquement, l'ensemble des points $(\cos(t), \sin(t))$ pour les t qui conviennent est représenté par un arc de cercle, de sorte que l'ensemble des t qui conviennent sur $[0, 2\pi]$ est la réunion de un ou deux intervalles, selon la valeur de α et de t_0. Sur la figure, l'arc de cercle rouge correspond aux points qui conviennent, et les paramètres correspondants sur $[0, 2\pi]$ sont alors une réunion de deux intervalles.



Etudions la fonction $h : t \longmapsto \cos(t) - \cos(\alpha)$, la fonction h est 2π-périodique et sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, la fonction h est positive si et seulement si $t \in [0, \alpha] \cup [2\pi - \alpha, 2\pi]$. Par conséquent, $\cos(t - t_0) \geq \cos(\alpha)$ si et seulement si $t - t_0 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, 2(k+1)\pi] \cup [2k\pi - \alpha, 2k\pi]$ et donc $\cos(t - t_0) \geq \cos(\alpha)$ sur $[0, 2\pi]$ si et seulement si

$$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [t_0 + 2k\pi, t_0 + \alpha + 2k\pi] \cap [0, 2\pi] \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [t_0 + 2k\pi - \alpha, t_0 + 2k\pi] \cap [0, 2\pi]$$

Il existe au plus un indice $k \in \mathbb{Z}$ tel que $[t_0 + 2k\pi, t_0 + 2(k+1)\pi] \cap [0, 2\pi] \neq \emptyset$ et dans ce cas cette intersection est un intervalle et donc l'ensemble

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [t_0 + 2k\pi, t_0 + 2(k+1)\pi] \cap [0, 2\pi]$$

est un intervalle, de même pour l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [t_0 + 2k\pi - \alpha, t_0 + 2k\pi] \cap [0, 2\pi]$ et donc I_0^δ est réunion de deux intervalles (donc est un intervalle ou réunion de deux intervalles disjoints).

III.A.2.b) Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de la fonction f sur $\mathcal{C}(0, 1)$ il existe $\delta > 0$

$$\|(\cos(t), \sin(t)) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \delta \Longrightarrow |f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

donc, en posant $\psi(x,y,t) = N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))$

$$\begin{aligned}\left|\int_{t\in I_0^\delta} \psi(x,y,t)N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))\,dt\right| &\leq \int_{t\in I_0^\delta} N(x,y,t)|f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0))|\,dt \\ &\leq \varepsilon' \int_{t\in I_0^\delta} N(x,y,t)\,dt \\ &\leq \varepsilon' \int_0^{2\pi} N(x,y,t)\,dt = 2\pi\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

III.A.2.c) Avec les notations de l'énoncé,

$$\|(\cos(t),\sin(t)) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\|_2^2 = (x-\cos(t))^2 + (y-\sin(t))^2 \leq \frac{\delta^2}{4}$$

donc,

$$N(x,y,t) = \frac{1-x^2-y^2}{(x-\cos(t))^2+(y-\sin(t))^2} \leq \frac{4(1-x^2-y^2)}{\delta^2}$$

III.A.2.d) La fonction f continue sur $\mathcal{C}(0,1)$ qui est un fermé borné, donc la fonction f est bornée et on note $M = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(\cos(t),\sin(t))|$. Soit $\varepsilon > 0$, en notant $\psi(x,y,t) = N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))$

$$\begin{aligned}\left|\int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} \psi(x,y,t)\,dt\right| &\leq \int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} |\psi(x,y,t)|\,dt \\ &\leq 2M\int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} |N(x,y,t)|\,dt \\ &\leq \frac{8M(1-x^2-y^2)}{\delta^2}\int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} dt \\ &\leq \frac{16\pi M(1-x^2-y^2)}{\delta^2}\end{aligned}$$

Or, par continuité des fonctions polynômiales,

$$\lim_{(x,y)\to(\cos(t_0),\sin(t_0))} 1-x^2-y^2 = 1-\cos^2(t_0)-\sin^2(t_0) = 0$$

donc il existe $\frac{\delta}{2} \geq \eta > 0$ tel que

$$\|(x,y)-(\cos(t_0),\sin(t_0))\|_2 \leq \eta \Longrightarrow \frac{16\pi M(1-x^2-y^2)}{\delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où la conclusion

III.A.3) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(x_0,y_0) \in \mathcal{C}(0,1)$. Il existe $t_0 \in [0,2\pi]$ tel que $(x_0,y_0) = (\cos(t_0),\sin(t_0))$

- $u(x_0,y_0) = f(\cos(t_0),\sin(t_0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t)f(\cos(t_0),\sin(t_0))\,dt$
- $u(x,y) - u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))\,dt$

On pose pour la suite $\psi(x,y,t) = N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))$. Pour δ fixé A2b et η fixé par $A2c$ pour $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2 \leq \delta$ et $(x,y) \in D(0,1)$

$$\begin{aligned}|u(x,y)-u(x_0,y_0)| &= |\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{I_0^\delta}\psi(x,y,t)\,dt + \tfrac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\setminus I_0^\delta}\psi(x,y,t)\,dt \\ &\leq \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{I_0^\delta}|\psi(x,y,t)|\,dt + \tfrac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\setminus I_0^\delta}|\psi(x,y,t)|\,dt \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $\mathcal{C}(0,1)$ en (x_0,y_0), il existe donc δ' tel que pour $(x,y) \in \mathcal{C}(0,1)$ vérifiant $\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2 \leq \delta'$,

$$|u(x,y)-u(x_0,y_0)| = |f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$$

Si $\delta'' = \min(\delta, \delta')$ alors pour $(x, y) \in \bar{D}(0,1)$ tel que $\|(x,y) - (x_0, y_0)\|_2 \le \delta''$,

$$|u(x,y) - u(x_0, y_0)| \le \varepsilon$$

La fonction u est donc continue en (x_0, y_0) pour tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}(0,1)$. La fonction u est continue en tout point de $D(0,1)$ et de $\mathcal{C}(0,1)$ donc est continue sur $\bar{D}(0,1)$.

III.B.1.a) Notons $F_n : x \longmapsto u_n(x, \tilde{y})$. La fonction F_n est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $\tilde{x}$. Supposons par l'absurde que $F_n''(\tilde{x}) > 0$, alors comme $F_n'(\tilde{x}) = 0$ (car $\tilde{x}$ est un extremum local de F_n) le tableau de variation de la fonction F_n au voisinage de $\tilde{x}$ est

x		$\tilde{x}$	
$F_n''(x)$		$+$	
$F_n'(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$F_n(x)$	$\searrow$	$F_n(\tilde{x})$	$\nearrow$

C'est absurde car $\tilde{x}$ est un maximum local. Par suite $F_n''(\tilde{x}) \le 0$.

III.B.1.b) Or comme u est une fonction harmonique $\Delta u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Delta u(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{2}{n} = \partial_{11} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) + \partial_{22} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \le 0$ c'est absurde. Ainsi, u_n n'admet pas de maximum local sur $D(0,1)$.

III.B.2) La fonction u_n continue sur le fermé borné $\bar{D}(0,1)$ atteint sont maximum en un point $(x_0, y_0) \in \bar{D}(0,1)$, comme il n'y a pas de maximum dans $D(0,1)$ nécessairement $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}(0,1)$ et pour tout $(x, y) \in \bar{D}(0,1)$

$$u_n(x,y) \le u_n(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

ce qui termine la preuve.

III.B.3) On en déduit que pour tout $(x, y) \in \bar{D}(0,1) : u(x,y) \le 0$. En appliquant le même raisonnement à la fonction $-u$, on obtient que $-u(x,y) \le 0$ et par suite que $u(x,y) = 0$.

III.C) La fonction $u \in \mathcal{D}_f$ d'après IIIA1b. Si $v \in \mathcal{D}_f$ alors $u - v$ est une fonction harmonique sur $D(0,1)$ qui est nulle sur $\mathcal{C}(0,1)$ donc $u - v = 0$ ce qui prouve que $\mathcal{D}_f = \{u\}$.

IV. Retour sur les polynômes harmoniques

IV. A.1) L'application Φ_{m-2} est clairement linéaire et si $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$ alors $\tilde{Q} \in \mathcal{P}_m$ donc $\Phi_{m-2}(Q) = \Delta\tilde{Q} \in \mathcal{P}_{m-2}$ donc $\mathrm{Im}\Phi_{m-2} \subset \mathcal{P}_{m-2}$. Il reste à étudier l'injectivité,

$$Q \in \mathrm{Ker}\Phi_{m-2} \Longleftrightarrow \Delta\tilde{Q} = 0$$

dans ce cas $\tilde{Q}$ est un polynôme harmonique, nulle sur $\mathcal{C}(0,1)$ car $1 - x^2 - y^2$ s'annule sur $\mathcal{C}(0,1)$, vu la partie III, on en déduit que $\tilde{Q} = 0$ donc que $Q = 0$ sur l'ouvert $D(0,1)$ et par suite que $Q = 0$ vu IAb. Ainsi Φ_{m-2} est un endomorphisme injectif de $\mathcal{P}_{m-2}$ donc un isomorphisme.

IV. A.2) Le polynôme $P \in \mathcal{P}_m$ donc $-\Delta P \in \mathcal{P}_{m-2}$ et comme Φ_{m-2} est un isomorphisme, il existe $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $-\Delta P = \Phi_{m-2}(T)$ de sorte que $P + (1 - x^2 - y^2)T$ est un polynôme harmonique.

IV. A.3) Il s'agit de résoudre le problème d'inconnue f

$$\begin{cases} f \text{ est harmonique sur } D(0,1) \\ \\ f_{|\mathcal{C}(0,1)} = P_C \end{cases}$$

En gardant les notations de IVA2, le polynôme $f = P + (1 - x^2 - y^2)T$ est un polynôme de $\mathcal{P}_m$, harmonique sur $D(0,1)$ et tel que $f_{|\mathcal{C}(0,1)} = P_C$ donc convient. D'après $IIIC$, l'ensemble $\mathcal{D}_{P_C}$ n'a qu'un seul élément ce qui prouve l'unicité de f.

IV. A.4) Il existe un polynôme T de degré 1 tel que $Q(x,y) = x^3 + (1 - x^2 - y^2)T(x,y)$ est harmonique. Le polynôme $T(x,y)$ est de la forme $ax + by$ et donc $\Delta Q(x,y) = (6 - 8a)x - 6by$, de sorte que Q est harmonique si et seulement si $a = \frac{3}{4}$ et $b = 0$. On obtient donc $\mathcal{D}_{P_C} = \{x^3 + \frac{3}{4}(1 - x^2 - y^2)x\}$.

IV. B.1) Soit $P \in \mathcal{P}$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 2$ tel que $P \in \mathcal{P}_m$ et donc il existe un polynôme $-T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $H = P - (1-x^2-y^2)T$ est harmonique et donc $P = H + (1-x^2-y^2)T$. Si les polynômes H_1, T_1conviennent aussi alors $H - H_1 = (1-x^2-y^2)(T_1 - T)$ est un polynôme harmonique sur $D(0,1)$ nul sur $\mathcal{C}(0,1)$ donc est nul, ainsi $H = H_1$ et par suite $T = T_1$ ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

IV. B.2) Considérons l'application ψ de $\mathcal{P}_m$ dans $\mathcal{P}_{m-2}$ donnée par $\psi(P) = \Delta P$. C'est une application linéaire et si $P \in \mathcal{P}_{m-2}$, il existe $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $\Phi_{m-2}(Q) = P$ et $(1-x^2-y^2)Q \in \mathcal{P}_m$, donc $P = \psi((1-x^2-y^2)Q)$. L'application ψ est surjective. Comme $\mathcal{H}_m = \mathrm{Ker}\psi$, le théorème du rang implique que

$$\dim \mathcal{H}_m = \dim \mathcal{P}_m - \mathrm{rg}(\psi) = \dim \mathcal{P}_m - \dim \mathcal{P}_{m-2} = 2m+1$$

IV. B.3) On sait que $\dim \mathcal{H}_3 = 7$.

Un polynôme hamonique de degré 0 est : 1

Deux polynômes harmoniques de degré 1 sont x et y

Deux polynômes harmoniques de degré 2 sont xy et $x^2 - y^2$

Deux polynômes harmoniques de degré 3 sont $x^3 + \frac{3}{4}(1-x^2-y^2)x$ et $y^3 + \frac{3}{4}(1-x^2-y^2)y$

La famille constituée de ces sept polynômes harmoniques est libre (facile à vérifier) de cardinal 7 donc est une base de $\mathcal{H}_3$.

IV. C.1) Considérons l'ensemble des $n+m-1$-uplet constitué de 0 et de 1 avec exactement $n-1$ apparitions de 1. Pour chaque n uplet $(i_1, \ldots, i_n)$ tel que $i_1 + \ldots + i_n = m$ on associe le $n+m-1$-uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+m-1})$ défini par

- $\varepsilon_{i_1+1} = \varepsilon_{i_1+i_2+2} = \ldots = \varepsilon_{i_1+\ldots+i_{n-1}+n-1} = 1$
- pour les autres indices $\varepsilon_i = 0$

cette application est une bijection de $\{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n / i_1 + \ldots + i_n = m\}$ dans l'ensemble des $n+m-1$-uplet constitué de 0 et de 1 avec exactement $n-1$ apparitions de 1. Un tel $n+m-1$-uplet est entièrement déterminé par le choix d'une partie de $[\![1, n+m-1]\!]$ de $n-1$ éléments qui correspond aux indices où sont les 1, il y a donc $\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$ tels éléments.

La famille $(x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n})_{\substack{i_1+\ldots+i_n \leq m \\ i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}}}$ est une base de $\mathcal{P}_m$ et donc la dimension de $\mathcal{P}_m$ est le cardinal de l'ensemble des $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $i_1 + \ldots + i_n \leq m$. Il y a $\binom{n+m-1}{m}$ tels éléments avec $i_1 + \ldots + i_n = m$, $\binom{n+m-2}{m}$ tels éléments avec $i_1 + \ldots + i_n = m-1$, ..., $\binom{n-1}{0}$ tels éléments avec $i_1 + \ldots + i_n = 0$ et donc $\dim(\mathcal{P}_m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k}$

IV. C.2) Le raisonnement de $IVB2$ s'applique encore, on peut montrer de même que tout polynôme $P \in \mathcal{P}$ s'écrit de manière unique

$$P(x_1, \ldots, x_n) = H(x_1, \ldots, x_n) + (1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2)Q(x_1, \ldots, x_n)$$

avec H harmonique (i.e. $\partial_{11}H + \ldots + \partial_{nn}H = 0$) et donc

$$\dim(\mathcal{H}_m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k} - \sum_{k=0}^{m-2} \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1}$$

Pour $n = 2$, on retrouve $\binom{m+1}{m} + \binom{m}{m-1} = m + 1 + m = 2m + 1$ comme il se doit.