ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

1981 **MATHÉMATIQUES** OPTION M

2ème ÉPREUVE (Durée: 4 h)

L'espace euclidien réel de dimension 3 est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désignera par $x'x$, $y'y$, $z'z$ les axes de coordonnées de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

D est la droite d'équations : $x = a$, $y = z$; a constante réelle strictement positive.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

I - 1°) Soit D_1 la droite symétrique de D par rapport au plan de coordonnées d'équation $z = 0$ et D' l'image de D_1 dans la rotation d'axe $z'z$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Former un couple d'équations pour chacune des droites D_1 et D'. Vérifier que le point S de coordonnées a, a, a est l'intersection de D' et D. Quelle est une équation du plan P contenant D et D'.

2°) Soit H la surface de révolution d'axe $z'z$, contenant la droite D ; c'est-à-dire la surface de révolution engendrée par la rotation de D autour de $z'z$.

Former une équation de H. Identifier cette surface.

Que peut-on dire de D' relativement à la surface H ?

3°) On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des cônes (ou surfaces coniques) de révolution dont D et D' sont deux génératrices particulières.

a - Former une équation du cône $C \in \mathcal{E}$ dont l'axe est parallèle à $z'z$.

b - Montrer que le cône C_λ d'équation :

$$(1) \quad (2a - \lambda)^2 [(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2] - 2 [a (x - a) + a (y - a) + (a - \lambda) (z - a)]^2 = 0,$$

λ désignant un paramètre réel, appartient à $\mathcal{E}$.

c - En déterminant l'axe du cône C_λ, donner une interprétation géométrique de λ.

Quels sont les cônes de la famille $\mathcal{E}$ dont l'équation n'est pas de la forme (1) ?

Que représente l'équation (1) lorsque $\lambda = 2a$? Interprétation ?

4°) Dans cette question, il pourra être utile d'utiliser le nouveau repère orthonormé direct $(S, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tel que :

$$\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}), \qquad \vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{j} - \vec{i})$$

.../...

a - Déterminer l'ensemble des points communs aux surfaces C et H.

b - Soit $C' \in \mathcal{E}$ le cône de la famille précédente correspondant à $\lambda = a$.

Déterminer l'ensemble des points communs à H et C'. (On remarquera que cet ensemble est symétrique par rapport au plan d'équation $y = x$).

On montrera, en particulier que cet ensemble contient une conique Γ dont on précisera le plan et la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$.

Quelle est la nature de Γ ?

5°) On considère la section plane E de la surface H par le plan variable Π d'équation :

$z = m(x - a)$, m étant un paramètre réel.

a - Discuter la nature de E suivant les valeurs de m.

b - A est le point de coordonnées a, 0, 0 et Π est rapporté au repère orthonormé $(A, \vec{u}, \vec{j})$, le vecteur unitaire $\vec{u}$ ayant une première coordonnée négative.

Former une équation de E, relativement à ce repère. (On pourra poser $m = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in]-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}[$).

c - Déterminer, en fonction de m ou de α, le rayon de courbure R et le centre de courbure I de E au point A.

d- Quel est, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'ensemble des points I correspondant aux diverses valeurs du réel m ?

II - Une droite mobile Δ coïncide avec D à la date $t = 0$, et est animée, par rapport au repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un mouvement de rotation d'axe z'z, de vitesse angulaire constante, égale à + 1. On désigne par A le point de Δ de cote nulle à la date t, par conséquent $(\vec{i}, OA) = t$.

Soit $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ le repère orthonormé déduit de $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par la rotation d'angle t d'axe z'z ; Δ est donc lié à ce repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$. Δ est orienté par le vecteur unitaire $\vec{K}$ dont la troisième coordonnée est positive.

Un solide $\mathcal{S}$, lié au repère orthonormé $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, est animé par rapport au repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ d'un mouvement de rotation d'axe Δ, de vitesse angulaire constante, égale à -1. A la date $t = 0$, le vecteur $\vec{I}$ est colinéaire avec OA et de même sens.

1°) Exprimer les vecteurs $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ en fonction de t et des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Donner, sans nouveau calcul, les expressions des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de t et de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$. (On pourra utiliser un repère orthonormé intermédiaire $(A, \vec{i}_1, \vec{v}, \vec{K})$.

2°) Déterminer, à la date t, le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}$ du mouvement de $\mathcal{S}$ par rapport au repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On conseille de calculer les coordonnées de $\vec{\Omega}$ dans le repère lié à $\mathcal{S}$.

3°) Déterminer la vitesse de glissement et l'axe instantané de rotation-glissement du mouvement précédent de $\mathcal{S}$.

XXXXX