a.chabchi@lydex.ma

Théorème de Moivre-Laplace

Résultats préliminaires

1. La formule de Stirling fournit un équivalent de $n!$, et on sait que :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

par conséquent $n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = o\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$, donc il existe une suite réelle $(\epsilon_n)_n$ convergente vers 0 telle que

$$n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \epsilon_n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \text{ Càd } n! = (1+\epsilon_n)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ CQFD}$$

2. Soit $\lambda > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a par définition de la partie entière, pour tout $x > 0$:

$$\lambda x + \mu - 1 < \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leq \lambda x + \mu \text{ donc } \frac{\lambda x + \mu - 1}{\lambda x} < \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} \leq \frac{\lambda x + \mu}{\lambda x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lambda x + \mu - 1}{\lambda x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lambda x + \mu}{\lambda x} = 1$, par suite $\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \sim \lambda x$ lorsque $x \to +\infty$.
De même en utilisant l'encadrement

$$\lambda x + \mu \leq \lceil \lambda x + \mu \rceil < \lambda x + \mu + 1$$

on obtient $\lceil \lambda x + \mu \rceil \sim \lambda x$ lorsque $x \to +\infty$.

3. La fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$ et par croissance comparée on a $\Phi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $\pm\infty$, or $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$ car de type Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. Ainsi Φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\, dt$ converge.

4. On a $\zeta(x) = (1+x)\ln(1+x) = (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o\left(x^2\right) = x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.

Etude asymptotique d'une suite

5. Etudions la monotonie de la suite finie $(P(X_n = k))_{0\leq k\leq n}$, puisque X_n suit une la binomiale $B(n,p)$, alors

$$P(X_n = k) = p^k q^{n-k}\tbinom{n}{k} \neq 0$$

Donc pour $k \in \{0, ..., n-1\}$:

$$P(X_n = k) < P(X_n = k+1) \Longleftrightarrow \frac{P(X_n = k)}{P(X_n = k+1)} < 1 \Longleftrightarrow \frac{q(k+1)}{n(n-k)} < 1 \Longleftrightarrow k < np - q$$

Donc $k+1 \leq \lceil np - q \rceil$, ainsi $P(X_n = 0) < P(X_n = 1) < ... < P(X_n = \lceil np - q \rceil)$ et au-delà de cette indice on ne peut plus avoir $P(X_n = k) < P(X_n = k+1)$. On conclut alors que p_n est la probabilité dominante d'une binomiale.

6. Selon la question Q.2, on a $x_n = \lceil np - q \rceil \sim np$ donc de limite $+\infty$. Par ailleurs on a par définition de $\lceil np - q \rceil$ l'inégalité

$$n - \lceil np - q \rceil = n - x_n \geq n(1-p) + q - 1$$

Puisque $p \in]0,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n - x_n = +\infty$.

D'autres parts, on a

$$p_n = P(X_n = x_n) = p^{x_n} q^{n-x_n} \binom{n}{x_n} = p^{x_n} q^{n-x_n} \frac{n!}{x_n!\,(n-x_n)!}$$

Or les suites $(x_n)_n$ st $(n-x_n)_n$ tendent vers $+\infty$, on peut donc utiliser la formule de Stirling, ainsi $x_n = \left(\sqrt{2\pi x_n}\left(\frac{x_n}{e}\right)^{x_n} + 1\right)\epsilon_{x_n}$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_{x_n} = 0$, donc $x_n! \sim \sqrt{2\pi x_n}\left(\frac{x_n}{e}\right)^{x_n}$ et de même $(n-x_n)! \sim \sqrt{2\pi(n-x_n)}\left(\frac{n-x_n}{e}\right)^{n-x_n}$. En reportant dans l'expression de p_n, on obtient :

$$\sqrt{npq}p_n \sim \sqrt{npq}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x_n(n-x_n)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}(n-x_n)^{n-x_n}}$$

Pour conclure il suffit de remarquer que $\frac{x_n}{n} \sim p$ et $\frac{n-x_n}{n} \sim q$, donc le terme $\sqrt{npq}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x_n(n-x_n)}} \to 1$.
CQFD

7. En passant à l'écriture exponentielle on aura :

$$\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}(n-x_n)^{n-x_n}} = e^{n\ln(n)} e^{-x_n \ln\left(\frac{x_n}{p}\right)} e^{-(n-x_n)\ln\left(\frac{n-x_n}{q}\right)}$$

puis en écrivant $e^{n\ln n} = e^{-x_n \ln\left(\frac{1}{n}\right)} e^{-(n-x_n)\ln\left(\frac{1}{n}\right)}$, on obtient de l'autre coté :

$$e^{-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right)-nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)} = e^{-np\left(1+\frac{x_n-np}{np}\right)\ln\left(1+\frac{x_n-np}{np}\right)-nq\left(1+\frac{x_n-np}{nq}\right)\ln\left(1+\frac{x_n-np}{nq}\right)} = e^{-x_n\ln\left(\frac{x_n}{np}\right)-(n-x_n)\ln\left(\frac{n-x_n}{nq}\right)}$$

D'où l'égalité entre les deux expressions.

8. On vérife facilement que les suites $\left(\frac{x_n-np}{np}\right)_n$ et $\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)_n$ sont à valeurs dans $]-1,+\infty[$ et convergent vers 0, donc d'après les questions Q.4, Q.6 et Q.7, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sqrt{npq}p_n &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right)-nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)} = e^{-np\left(1+\frac{x_n-np}{np}\right)\ln\left(1+\frac{x_n-np}{np}\right)-nq\left(1+\frac{np-x_n}{nq}\right)\ln\left(1+\frac{np-x_n}{nq}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-np\left(\frac{x_n-np}{np}+\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-np}{np}\right)^2+o\left(\frac{x_n-np}{np}\right)^2\right)-nq\left(\frac{np-x_n}{nq}+\frac{1}{2}\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)^2+o\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)^2\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-np}{\sqrt{np}}\right)^2+o\left(\frac{x_n-np}{\sqrt{np}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{np-x_n}{\sqrt{nq}}\right)^2+o\left(\frac{np-x_n}{\sqrt{nq}}\right)^2}
\end{aligned}$$

la suite $(x_n-np)_n$ étant bornée, donc le terme à l'exponentielle tend vers 0, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{npq}p_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Convergence en loi

9. On a $Y_n(\Omega) = \{\tau_{n,k}\ /\ 0 \le k \le n\}$ et puisque X_n suit la loi binomiale $B(n,p)$, alors $P(Y_n = \tau_{n,k}) = P(X_n = k) = p^k q^{n-k}\binom{n}{k}$.
On sait que $E(X_n) = np$, $V(X_n) = npq$, de plus l'espérance étant linéaire et la variance vérifie $V(aX+Y) = a^2V(X)$, donc

$$E(Y_n) = \frac{E(X_n)-np}{\sqrt{npq}} = 0 \text{ et } V(Y_n) = \frac{E(X_n)}{npq} = 1$$

Ainsi la varaible Y_n est centrée réduite.

10. On a $\tau_{n,0} = \frac{-np}{\sqrt{npq}} \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et $\tau_{n,n} = \frac{n(1-p)}{\sqrt{npq}} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, donc il existe un rang $N_1 \ge 1$ tel que $\forall\ n \ge N_1,\ [a,b] \subset [\tau_{n,0},\tau_{n,n}]$. De même puisque $b-a>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{npq}} = 0$, il existe un rang $N_2 \ge 1$ tel que $\forall\ n \ge N_2,\ \frac{1}{\sqrt{npq}} \le b-a$. Il suffit alors de prendre $N = \max(N_1,N_2)$.

11. A l'aide de la définition de $k_n(t) = \lfloor \sqrt{npq}t + np \rfloor$, on vérifie facilement que pour tout entier s, la fonction e_n est constante sur l'intervalle $[\tau_{n,s}, \tau_{n,s+1}[$ est vaut $\tau_{n,s}$, donc en escalier sur $[\tau_{n,0}, \tau_{n,n}] = (\cup_{0\leq s\leq n-1} [\tau_{n,s}, \tau_{n,s+1}[) \cup \{\tau_{n,n}\}$. Ainsi si $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, on sait selon Q.10, qu'il existe un rang N à partir du quel $[a,b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}]$, d'où e_n sera en escalier sur chaque segment $[a,b]$, par suite en escalier sur $\mathbb{R}$.

D'autres parts, $t \longmapsto k_n(t) = \lfloor \sqrt{npq}t + np \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $k \longmapsto \tau_{n,k} = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ est croissance sur $\mathbb{Z}$, donc par composée la fonction $e_n : t \longmapsto \tau_{n,k_n(t)}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Puis à l'aide de l'encadrement $\sqrt{npq}t + np - 1 < k_n(t) \leq \sqrt{npq}t + pn$, on obtient l'inégalité :

$$e_n(t) = \frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Par conséquent, on aura

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t - e_n(t) \leq \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

Or la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\right)_{n\geq 1}$ est convergente vers 0, donc la suite de fonction $(e_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers l'application identique $e : t \longmapsto t$. Notons que cette convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ puisque $\|t - e_n(t)\|_\infty^{\mathbb{R}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \to 0$, quand $n \to +\infty$

12. On a d'abord $\tau_{n,k_n(a)} = e_n(a) \to a$ lorsque $n \to +\infty$ et aussi $\tau_{n,k_n(b)+1} = e_n(b) + \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \to b$ lorsque $n \to +\infty$. Et puisque Φ est continue alors la fonction $h(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \Phi(t)\,dt = \int_0^\beta \Phi(t)\,dt - \int_0^\alpha \Phi(t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. (En faite de classe C^1 car ses dérivées partielles sont $\dfrac{\partial h}{\partial \alpha} : (\alpha,\beta) \longmapsto -\Phi(\alpha)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial \beta} : (\alpha,\beta) \longmapsto \Phi(\beta)$ continues sur R^2).

Ainsi $h\left(\tau_{n,k_n(a)}, \tau_{n,k_n(b)+1}\right) = \displaystyle\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)\,dt$ converge vers $h(a,b) = \displaystyle\int_a^b \Phi(t)\,dt$.

D'autres parts puisque la fonction e_n est constante sur l'intervalle $[\tau_{n,s}, \tau_{n,s+1}[$ est vaut $\tau_{n,s}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) &= \sum_{s=k_n(a)}^{k_n(b)} P(Y_n = \tau_{n,s}) = \sum_{s=k_n(a)}^{k_n(b)} \frac{1}{\tau_{n,s+1} - \tau_{n,s}} \int_{\tau_{n,s}}^{\tau_{n,s+1}} P(Y_n = e_n(t))\,dt \\ &= \sqrt{npq} \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} P(Y_n = e_n(t))\,dt = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,dt. \text{ CQFD} \end{aligned}$$

13. On remarque d'abord que $\tau_{n,k_n(\tau_{n,k})} = \lfloor \sqrt{npq}\tau_{n,k} + np \rfloor = \left\lfloor \sqrt{npq}\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}} + np \right\rfloor = k$, donc il vient : $f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq}P\left(Y_n = \tau_{n,k_n(\tau_{n,k})}\right) = \sqrt{npq}P(Y_n = \tau_{n,k}) = \sqrt{pqn}P(X_n = k) = \sqrt{pqn}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ par égalité des événements $(Y_n = \tau_{n,k})$ et $(X_n = k)$, ensuite il suffit d'écrire

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

puis de remplacer les factoriels $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n (1+\epsilon_n)$, $k! = \sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^k (1+\epsilon_k)$ et

$(n-k)! = \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\dfrac{n-k}{e}\right)^{n-k} (1+\epsilon_{n-k})$ par leurs expressions obtenues à la quesion Q.1 pour conclure.

14. On a par défintion de la partie enitière $\sqrt{npq}t + np - 1 < k_n(t) \leq \sqrt{npq}t + np$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(t)}{n} = p$. De la même façon on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n - k_n(t)}{n} = 1 - p = q$. Or pour n assez grand on ne peut avoir $k_n(t) = 0$

ou $k_n(t) = n$ car on aura respectivement $t < \dfrac{1-np}{\sqrt{npq}} \to -\infty$ ou $t \geq \dfrac{n-np}{\sqrt{npq}} \to +\infty$. Ainsi pour n assez grand et $t \in [a,b]$, le rapport est bien défini et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{pqn^2}{k_n(t)(n-k_n(t))}} = 1. \text{ CQFD}$$

On vient de voir que les termes $k_n(t)$ et $n-k_n(t)$ tendent vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\epsilon_n}{\left(1+\epsilon_{k_n(t)}\right)\left(1+\epsilon_{n-k_n(t)}\right)} = 1.$$

15. L'hypothèse sur k assure le fait que $\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k},\ -\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k}\ \in]-1,1[$, donc la fonction ζ est bien définie en ces deux points. Comme à la question Q.7, on a

$$\frac{n^n p^k q^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}} = \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = e^{-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right)-nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)} = e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right)-nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)}. \text{ CQFD}$$

16. La question Q.7 prouve que pour tout $t \in [a,b]$, la suite $\left(\tau_{n,k_n(t)}\right)_n$ est bornée, donc les termes $\sqrt{\dfrac{q}{np}}\left|\tau_{n,k_n(t)}\right|$, $\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\left|\tau_{n,k_n(t)}\right|$ sont de limites nulles quand n tend vers $+\infty$, ainsi pour n assez grand les hypothèses de la question Q.15 sont satisfaites, et on a alors

$$\frac{p^{k_n(t)} q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)} \left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} = e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)}\right)-nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}\right)}$$

En utilisant le développement limité obtenu à la question Q.2, on obtient, en remplaçant $\tau_{n,k_n(t)}$ par $e_n(t)$:

$$\frac{p^{k_n(t)} q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)} \left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-np\left(\sqrt{\frac{q}{np}}e_n(t)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{q}{np}}e_n(t)\right)^2+o\left(\left(\sqrt{\frac{q}{np}}e_n(t)\right)^2\right)\right)-nq\left(\sqrt{\frac{p}{nq}}e_n(t)+\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}e_n(t)\right)^2+o\left(\left(\sqrt{\frac{p}{nq}}e_n(t)\right)^2\right)\right)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(e_n(t))^2+o\left((e_n(t))^2\right)}
\end{aligned}$$

Or selon la question Q.11, on a pour t fixé, $(e_n(t))^2 = t^2+o(1)$ quand $n \to +\infty$ et $o\left((e_n(t))^2\right) \to_{n\to+\infty} 0$, donc on conclut que

$$e^{-\frac{1}{2}(e_n(t))^2+o\left((e_n(t))^2\right)} = e^{-\frac{1}{2}t^2+o(1)} \to e^{-\frac{1}{2}t^2}. \text{ CQFD}$$

17. Selon la question Q.13, on a $f_n(t) = f_n\left(\tau_{n,k_n(t)}\right)$, La convergence simple de $(f_n)_n$ vers Φ sur $[a,b]$ découle alors directement des questions Q.13, Q.14 et Q.16.

    De plus on a pour tout $t \in [a,b]$, $|f_n(t)| = \left|\sqrt{npq}P(Y_n = e_n(t))\right| = \sqrt{npq}P(X_n = k_n(t)) \leq \sqrt{npq}p_n$, où p_n désigne la probabilité dominante de X_n introduite à la question Q.5. Or selon la question Q.11 cette suite $\left(\sqrt{npq}p_n\right)_n$ étant convergente, donc en particulier bornée par une certaine constante M. Ainsi

$$\forall\ t \in [a,b],\ |f_n(t)| \leq M \text{ (Hypothèse de domination)}$$

    La constante $t \longmapsto M$ est intégrable sur le segment $[a,b]$, donc le théorème de la convergence dominée s'applique et obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b \Phi(t)\,dt. \text{ CQFD}$$

18. D'après la question Q.12, on a

$$\begin{aligned} P\left(e_n(a) \le Y_n \le e_n(b)\right) &= \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,dt = \int_{e_n(a)}^{e_n(b)+\frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t)\,dt \\ &= \int_{e_n(a)}^{a} f_n(t)\,dt + \int_a^b f_n(t)\,dt + \int_b^{e_n(b)+\frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t)\,dt \end{aligned}$$

Or les fonctions f_n sont uniformément bornées par une constante M (Q.17), $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n(a) = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n(b) + \dfrac{1}{\sqrt{npq}} = b$, donc

$$\left|\int_{e_n(a)}^{a} f_n(t)\,dt\right| \le M\left|e_n(a) - a\right| \to 0 \text{ et } \left|\int_b^{e_n(b)+\frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t)\,dt\right| \le M\left|e_n(b) + \tfrac{1}{\sqrt{npq}} - b\right| \to 0$$

On conclut alors que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(e_n(a) \le Y_n \le e_n(b)\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \Phi(t)\,dt. \text{ CQFD}$$

D'autres parts, les suites $(e_n(a))_n$ et $(e_n(b))_n$ sont convergent respectivement vers a et b, puisque $a < b$, on peut alors supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n(a) \le a < e_n(b) \le b$. (C'est vérifié pour n assez grand pour $e_n(b)$), donc par disjonction des événements, on aura

$$P(a \le Y_n \le b) = P\left(e_n(a) \le Y_n \le e_n(b)\right) + P\left(e_n(b) < Y_n \le b\right) - P\left(e_n(a) \le Y_n < a\right)$$

D'après la question Q.11, on a $[e_n(a), a[\subset \left[e_n(a), e_n(a) + \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\right[$, donc

$$\begin{aligned} P\left(e_n(a) \le Y_n < a\right) &\le P\left(e_n(a) \le Y_n < e_n(a) + \frac{1}{\sqrt{npq}}\right) \\ &= P\left(e_n(a) \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < e_n(a) + \frac{1}{\sqrt{npq}}\right) = P\left(\sqrt{npq}e_n(a) + np \le X_n < \sqrt{npq}e_n(a) + np + 1\right) \end{aligned}$$

Or si X_n appartiendra à un intervalle de longueur 1 et elle est à valeurs entière, donc forcément

$$\left(\sqrt{npq}e_n(a) + np \le X_n < \sqrt{npq}e_n(a) + np + 1\right) \Longrightarrow X_n = \lfloor\sqrt{npq}e_n(a) + np\rfloor \text{ ou } X_n = \lfloor\sqrt{npq}e_n(a) + np + 1\rfloor$$

Dans tous les cas, on aura, en notant p_n la probabilité dominante de $\cancel{X}_n$ (introduite à Q.5) :

$$P\left(e_n(a) \le Y_n < a\right) \le p_n \to 0 \text{ selon Q.8}$$

On établit de même que $\left(P\left(e_n(b) < Y_n \le b\right)\right)_n$ converge vers 0. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \le Y_n \le b) = \lim_{n\to+\infty} P\left(e_n(a) \le Y_n \le e_n(b)\right) = \int_a^b \Phi(t)\,dt. \text{ CQFD}$$

Applications

19. A l'aide de la question Q.18,on a

$$\int_{-T}^{T} \Phi(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| \le T) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| > T)$$

Or la variable Y_n est centrée-réduite, donc selon l'inégalité de Bienaymé-Tchebechev, on aura

$$P(|Y_n| > T) \le P(|Y_n| \ge T) = P\left(|Y_n - E(Y_n)| \ge T\right) \le \frac{V(Y_n)}{T^2} = \frac{1}{T^2}.$$

Par conséquent

$$\int_{-T}^{T} \Phi(t)\,dt = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| > T) \ge 1 - \frac{1}{T^2}.$$

On obtient alors l'encadrement :

$$1-\frac{1}{T^2}\leq\int_{-T}^{T}\Phi\left(t\right)dt=1-\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|Y_n\right|>T\right)\leq 1$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(t\right)dt=1$$

20. On a pour $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $k>a$:

$$\begin{aligned}\left|P\left(Y_n\geq a\right)-\int_a^{+\infty}\Phi\left(t\right)dt\right| &\leq \left|P\left(Y_n\geq a\right)-P\left(Y_n>k\right)-\int_a^k\Phi\left(t\right)dt\right|+\\ &\left|P\left(Y_n>k\right)\right|+\left|\int_a^k\Phi\left(t\right)dt-\int_a^{+\infty}\Phi\left(t\right)dt\right|\end{aligned}$$

On a les résultats suivants :

- $\left|P\left(Y_n\geq a\right)-P\left(Y_n>k\right)-\int_a^k\Phi\left(t\right)dt\right|=\left|P\left(a\leq Y_n\leq k\right)-\int_a^k\Phi\left(t\right)dt\right|\to 0$ quand $n\to+\infty$
- Pour $k>0$, on a $\left(Y_n>k\right)\subset\left(\left|Y_n\right|\geq k\right)$, donc en utilisant Q.19 : $P\left(Y_n>k\right)\leq P\left(\left|Y_n\right|\geq k\right)\leq\frac{1}{k^2}\to 0$ quand $k\to+\infty$
- $\left|\int_a^k\Phi\left(t\right)dt-\int_a^{+\infty}\Phi\left(t\right)dt\right|\to 0$ quand $k\to+\infty$

  Soit $\varepsilon>0$, il existe donc $N'\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\left|P\left(Y_n>N'\right)\right|+\left|\int_a^{N'}\Phi\left(t\right)dt-\int_a^{+\infty}\Phi\left(t\right)dt\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$, puis il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que

  $$\forall\ n\geq N,\ \left|P\left(Y_n\geq a\right)-P\left(Y_n>N'\right)-\int_a^{N'}\Phi\left(t\right)dt\right|=\left|P\left(a\leq Y_n\leq N'\right)-\int_a^{N'}\Phi\left(t\right)dt\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

  On conclut alors que

  $$\forall\ n\geq N,\ \left|P\left(Y_n\geq a\right)-\int_a^{+\infty}\Phi\left(t\right)dt\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

  Càd $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(Y_n\geq a\right)=\int_a^{+\infty}\Phi\left(t\right)dt$. De même $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(Y_n\leq b\right)=\int_{-\infty}^{b}\Phi\left(t\right)dt$.

Généralisation

21. Puisque φ' est continue ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, alors par le TVI elle est strictement monotone, en particulier φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$ et dont la réciproque φ^{-1} est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Traitons le cas où $\varphi'>0$ (l'autres cas sera analogue), pour $\alpha\leq\beta$ réels, on a

$$P\left(\alpha\leq Z_n\leq\beta\right)=P\left(\varphi^{-1}\left(\alpha\right)\leq Y_n\leq\varphi^{-1}\left(\beta\right)\right)\to_{n\to+\infty}\int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)}\Phi\left(t\right)dt=\int_\alpha^\beta\frac{\Phi\circ\varphi^{-1}\left(u\right)}{\varphi'\circ\varphi^{-1}\left(u\right)}du$$

(par le changement de variable $t=\varphi^{-1}\left(x\right)$, qui réalise une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). Il suffit alors de prendre $\Psi=\frac{\Phi\circ\varphi^{-1}}{\varphi'\circ\varphi^{-1}}$ qui est bien continue sur $\mathbb{R}$. (ceci reste valable pour α ou β éventuellement infini).

- Si l'on suppose plus $\varphi\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$, alors φ réalisera un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $I=\varphi\left(\mathbb{R}\right)$ un intervalle forcément ouvert de $\mathbb{R}$. Par exemple dans le cas $\varphi'>0$, on aura :
  - Le même résultat sera valable pour $\alpha\leq\beta$ dans I, avec Ψ définie sur I par $\Psi=\frac{\Phi\circ\varphi^{-1}}{\varphi'\circ\varphi^{-1}}$.

  - La limite de Ψ en l'extrémité supérieure de I est forcément nulle, on peut alors penser à la pronlonger jusqu'a $+\infty$ par 0 en consevant sa continuité. le résulat se prolonge pour $\alpha \leq \beta$ avec $\alpha \in I$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

- Analogue si $\varphi' < 0$.

Fin du corrigé