

1 Matrices et réversibilité

1. L'application

$$(t, U) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto AU \in \mathbb{R}^d$$

est linéaire donc de classe C^1 . Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et nous montre donc que (1) possède une unique solution maximale définie sur un intervalle I ouvert contenant 0.

Pour $U_0 = e_i$ le i ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d , notons I_i l'intervalle et U_i la solution associée.

On a, si $U_0 = (U_0^1, \dots, U_0^d)$ et par linéarité de l'équation, l'égalité

$$(E) \quad \forall t \in \bigcap_{i=1}^d I_i, U(t) = \sum_{i=1}^d U_0^i U_i(t)$$

et il suffit de démontrer que $[0, +\infty[\subset I_i$ pour tout i .

Par l'absurde, supposons donc que $T = \sup I_{i_0} = \inf_i (\sup I_i) < +\infty$. Le problème de Cauchy (1) avec la donnée initiale $U_0 = U_{i_0}(T/2)$ admet alors une solution définie au moins sur $[0, T)$ d'après (E). Par raccord, on dispose ainsi d'une solution avec la donnée initiale $U_0 = e_{i_0}$ définie au moins sur $[0, 3T/2)$ ce qui contredit la maximalité de I_{i_0} .

On a donc $I \supset [0, +\infty[$ ce qu'il fallait démontrer.

2. Fixons n et $p > 0$ deux entiers. On a alors

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} \|A\|^k = s_{n+p} - s_n$$

avec $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{\|A\|^k}{k!}$. s est une suite convergente (de limite $e^{\|A\|}$) donc de Cauchy.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc n_0 tel que, pour $n \geq n_0$ et $p > 0$, $s_{n+p} - s_n \leq \varepsilon$ donc

$$\forall n \geq n_0, \forall p > 0, \|S_{n+p} - S_n\| \leq \varepsilon.$$

La suite S est bien de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$ puis convergente (car l'espace $(\mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est complet). $\exp(A)$ est donc bien définie.

3. On a d'abord, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP.$$

Ainsi,

$$\exp(P^{-1}AP) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(P^{-1}AP)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{-1} \frac{A^n}{n!} P$$

et puisque l'application $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}MP \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est continue (car linéaire), on a bien

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} P = P^{-1} \exp(A) P.$$

4. Posons $U(t) = E_A(t)U_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

U est produit de E_A et de l'application constante U_0 , elle est donc dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R}, U'(t) = E'_A(t)U_0 = AE_A(t)U_0 = AU(t).$$

U est donc bien solution de (1); c'est la solution d'après la question 1.

5. Soit U une solution à (1) sur $] -\infty, 0]$. Alors, par composition, $V : t \geq 0 \mapsto U(-t)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall t \geq 0, V'(t) = -U'(-t) = -AU(-t) = -AV(t).$$

V est donc solution sur $[0, +\infty[$ de (1) obtenue en remplaçant A par $-A$.

D'après la question 1 (A étant une matrice quelconque), V est donc la solution $t \geq 0 \mapsto E_{-A}(t)U_0$, ce qui montre que U est la solution unique : $t \leq 0 \mapsto E_{-A}(-t)U_0$.

6. Supposons les assertions (2) ou (3) vérifiées pour la norme $|\cdot|$ et choisissons \mathcal{N} une norme quelconque sur \mathbb{R}^d . Les normes $|\cdot|$ et \mathcal{N} étant équivalentes, il existe $C > 1$ tel que

$$\forall X \in \mathbb{R}^d, C^{-1}|X| \leq \mathcal{N}(X) \leq C|X|.$$

Ainsi, quelque soit $U_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{N}(U(t)) \leq C|U(t)| \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$ si (2) est vérifiée et, si $U_0 \neq 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{N}(U(t)) \geq C^{-1}|U(t)| \rightarrow +\infty$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$ si (3) est vérifiée.

7. (a) Pour $d = 1$, toute matrice est déjà triangulaire.
 (b) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de M possède une racine (car \mathbb{C} est algébriquement clos) et donc M possède une valeur propre λ associée à un vecteur propre $X_1 \neq 0$.
 En complétant cette famille libre en une base $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_d)$ de \mathbb{C}^d , l'application m canoniquement associée à M vérifie alors

$$M_{\mathcal{B}}(m) = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ 0_{d-1} & N \end{pmatrix}$$

avec $N \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{C})$. M est donc bien équivalente à la matrice proposée.

- (c) D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $Q_0 \in GL_{d-1}(\mathbb{C})$ et $T_0 \in \mathcal{T}_{d-1}^+(\mathbb{C})$ telle que

$$N = Q_0^{-1}T_0Q_0.$$

Ainsi, en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0_{d-1} & Q_0 \end{pmatrix}$, on a

$$Q \begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ 0_{d-1} & N \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0_{d-1} & Q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ 0_{d-1} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0_{d-1} & Q_0^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ 0_{d-1} & T_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_d^+(\mathbb{C})$$

et puisque M est elle-même semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ 0_{d-1} & N \end{pmatrix}$, M est bien semblable à un élément de $\mathcal{T}_d^+(\mathbb{C})$.

8. D'après la question précédente, M est semblable à une certaine matrice T triangulaire supérieure. Suivons l'indication de l'énoncé et considérons $P = \text{Diag}(\delta, \dots, \delta^d)$.

Calculons $T' = P^{-1}TP$. Il s'agit de la matrice de l'endomorphisme t canoniquement associé à T dans la base $(\delta e_1, \dots, \delta^d e_d)$ (si (e_1, \dots, e_d) est la base canonique de \mathbb{C}^d).

Puisque

$$\forall j \in 1, \dots, n, t(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq j} T_{i,j} e_i$$

on a, pour tout $j = 1, \dots, n$,

$$t(\delta^j e_j) = \sum_{1 \leq i \leq j} T_{i,j} \delta^{j-i} (\delta^i e_i)$$

et ainsi T' est une matrice triangulaire supérieure telle que, pour $i \leq j$, $T'_{i,j} = \delta^{j-i} T_{i,j}$.

En particulier, pour $i < j$, $|T'_{i,j}| \leq \delta \|T\|_{\infty}$ (avec $\|T\|_{\infty} = \max_{i,j} |T_{i,j}|$) et donc pour δ suffisamment petit, T' a tous ses coefficients en module inférieur à ε .

Puisque M reste semblable à T' , le résultat voulu est démontré : les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire T' sont nécessairement les racines du polynôme caractéristique de M donc ses valeurs propres.

9. Soit $s \leq t$ et $I = [s, t]$. L'hypothèse nous fournit

$$\forall x \in I, g'(x) \leq \alpha g(x) \Leftrightarrow e^{-\alpha x} g'(x) - \alpha e^{-\alpha x} g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} (e^{-\alpha x} g(x)) \leq 0.$$

La fonction $x \mapsto e^{-\alpha x} g(x)$ est donc décroissante sur I et en particulier

$$e^{-\alpha t} g(t) \leq e^{-\alpha s} g(s) \Leftrightarrow g(t) \leq e^{\alpha(t-s)} g(s).$$

Remarque : l'hypothèse $\alpha > 0$ est inutile.

10. On note $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ la norme standard sur \mathbb{C}^d et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ la forme sesquilinéaire associée.

Soit g la fonction telle que $g(t) = |U(t)|_{\mathbb{C}}^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors g dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = 2 \operatorname{Re}(\langle AU(t), U(t) \rangle_{\mathbb{C}}) = 2 \operatorname{Re}(\langle DU(t), U(t) \rangle_{\mathbb{C}}) + 2 \operatorname{Re}(\langle NU(t), U(t) \rangle_{\mathbb{C}}).$$

De plus, pour tout $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$,

$$\operatorname{Re}(\langle DX, X \rangle_{\mathbb{C}}) = \sum_{i=1}^d \operatorname{Re}(\lambda_i) |x_i|^2 \leq \sigma |X|_{\mathbb{C}}^2$$

et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\operatorname{Re}(\langle NX, X \rangle) \leq |X|_{\mathbb{C}} |NX|_{\mathbb{C}}$$

puis, puisque tous les coefficients de N sont de module inférieurs à ε ,

$$\forall i, \left| \sum_j N_{i,j} x_j \right|^2 \leq d\varepsilon^2 |X|_{\mathbb{C}}^2 \Rightarrow |NX|_{\mathbb{C}} \leq d\varepsilon |X|_{\mathbb{C}}.$$

En revenant à g , on obtient donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) \leq 2(\sigma + d\varepsilon)g(t)$$

et d'après la question précédente, on en déduit finalement

$$\forall t \geq 0, g(t) \leq e^{2(\sigma + d\varepsilon)t} g(0)$$

ce qui, passant à la racine carrée, nous fournit le résultat voulu.

Remarque : l'énoncé est très imprécis puisque l'inégalité voulue n'est vraie que pour $t \geq 0$.

11. Montrons que si (1) est irréversible bien orienté alors A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative.

Soit λ une valeur propre de A et posons $X = X_1 + iX_2$, avec $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^d$, un vecteur propre associé.

La solution U_1 de (1) pour $U_0 = X_1$ et la solution U_2 de (1) pour $U_0 = X_2$ sont telles que $U = U_1 + iU_2$ soit solution du problème de Cauchy

$$U'(t) = AU(t), U(0) = X.$$

Par unicité de ces solutions, on a donc $U(t) = e^{\lambda t} X$ et ainsi

$$e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} |X|_{\mathbb{C}} = |e^{\lambda t} X|_{\mathbb{C}} \leq |U_1(t)| + |U_2(t)| \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$. Nécessairement, on a donc $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

On montre de même que si (1) est irréversible mal orienté alors A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement positive. En effet, si λ est une valeur propre de A , alors en conservant les notations précédentes,

$$e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} |X| \geq \max(|U_1(t)|, |U_2(t)|)$$

et puisque $X_1 + iX_2 \neq 0$, on a $|U_1(t)|$ ou $|U_2(t)|$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et nécessairement $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

Réciproquement, montrons que si A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative alors (1) est irréversible bien orienté.

Il suffit de démontrer les résultats pour une norme quelconque de \mathbb{R}^d , toutes les normes étant équivalentes.

D'après la question 8, A est semblable à une matrice \tilde{A} qui satisfait l'hypothèse de la question 10. Il existe $P \in \operatorname{GL}_d(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1} \tilde{A} P$ et en posant $\mathcal{N}_0(U) = |PU|_{\mathbb{C}}$, on a

$$\forall t \geq 0, \mathcal{N}_0(U(t)) \leq e^{(\sigma + d\varepsilon)t} \mathcal{N}_0(U_0)$$

avec $\sigma = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} (\operatorname{Re}(\lambda))$.

En effet, la solution à (1) avec \tilde{A} à la place de A et de donnée initiale PU_0 est $t \mapsto PU(t)$ (d'après la question 3) et donc, d'après la question 10,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |PU(t)|_{\mathbb{C}} \leq e^{(\sigma + d\varepsilon)t} |PU_0|_{\mathbb{C}}.$$

Si ε suffisamment petit pour que $\sigma + d\varepsilon < 0$, on a alors

$$|PU(t)|_{\mathbb{C}} \leq e^{(\sigma + d\varepsilon)t} |PU_0|_{\mathbb{C}} \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$. (1) est ainsi irréversible bien orienté.

On montre de même que si A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement positive alors (1) est irréversible mal orienté.

D'abord si $A = D + N$ avec $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ une matrice à coefficients diagonaux de partie réelle strictement positives et N une matrice dont tous les coefficients sont en valeur absolue plus petits que ε alors, de manière identique à la question 10,

$$\forall U \in \mathbb{C}^d, \operatorname{Re}(\langle AU, U \rangle_{\mathbb{C}}) \geq (\tau - d\varepsilon) |U|_{\mathbb{C}}^2$$

avec $\tau = \min(\operatorname{Re}(\lambda_1), \dots, \operatorname{Re}(\lambda_d))$. Si maintenant $U(t)$ est la solution de (1) avec cette matrice A et pour une donnée initiale $U_0 \neq 0$, on a alors, pour ε assez petit, l'existence de $\lambda > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt} |U(t)|_{\mathbb{C}}^2 \geq 2\lambda |U(t)|_{\mathbb{C}}^2$$

et $g : t \mapsto -|U(t)|_{\mathbb{C}}^2$ vérifie alors l'hypothèse de la question 9 (avec $\alpha = 2\lambda$) qui nous fournit

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |U(t)|_{\mathbb{C}} \geq e^{\lambda t} |U_0|_{\mathbb{C}}.$$

On procède alors comme ci-dessus pour obtenir, pour tout $U_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $U_0 \neq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |U(t)| = +\infty$$

ce qui nous montre bien la propriété voulue.

12. D'après la question précédente, si (1) est irréversible bien orienté alors A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative.

Soit donc un vecteur $U_0 \neq 0$. Puisque $-A$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement positive, alors (1) avec A remplacé par $-A$ et de donnée initiale est irréversible mal orienté et donc sa solution $t \mapsto U(-t)$ vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |U(-t)| = +\infty$$

et, d'après la question 6 appliquée à $-A$, (1) avec $-A$ remplacé par A est irréversible mal orienté et ceci vaut donc pour toute norme \mathcal{N} .

On procède de manière absolument identique pour montrer la deuxième assertion.

2 Matrices et entropie

1. L'application $(U, V) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \langle U, V \rangle_{\mathcal{N}}$ est bilinéaire donc de classe C^1 . Par composition, l'application $U \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \mapsto \mathcal{N}(U)$ est donc elle aussi C^1 .

Distinguons maintenant les cas.

Si $U_0 = 0$, l'application $t \mapsto \mathcal{N}(U(t))$ est nulle et donc bien dérivable.

Si $U_0 \neq 0$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $t \mapsto U(t)$ ne s'annule pas et donc, par composée d'applications dérivables, $t \mapsto \mathcal{N}(U(t))$ est aussi dérivable.

2. (a) Calculons d'abord les puissances de A . On écrit

$$A = -\operatorname{Id}_2 + N$$

avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque $N^2 = 0$, la formule du binôme nous fournit, pour $n \geq 0$,

$$A^n = (-1)^n \operatorname{Id}_2 + n(-1)^{n-1} N = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

En calculant coefficient par coefficient, on a donc, pour tout t réel,

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n 3n(-1)^{n-1}}{n!} = 3t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} = 3te^{-t}$.

- (b) On a clairement, si $U_0 = (u_1, u_2)$,

$$\exp(tA)U_0 = e^{-t}(u_1 + 3tu_2, u_2)$$

et donc la solution $U(t)$ de (1) tend vers 0 en $+\infty$.

- (c) D'après le calcul précédent, si U est la solution de (1), on a pour tout $t \geq 0$

$$|U(t)| = e^{-t}(u_2^2 + (u_1 + 3tu_2)^2)^{1/2}$$

et ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |U(t)| &= \frac{e^{-t}}{(u_2^2 + (u_1 + 3tu_2)^2)^{1/2}} (u_2^2 + (u_1 + 3tu_2)^2 + 3u_2(u_1 + 3tu_2)) \\ &= \frac{e^{-t}}{(u_2^2 + (u_1 + 3tu_2)^2)^{1/2}} (u_1^2 + 3u_1u_2 + u_2^2 + (6u_1u_2 + 9u_2^2)t + 9u_2^2t^2). \end{aligned}$$

Pour $U_0 = (1, -1)$ et $t = 0$, on a donc $\frac{d}{dt} |U(t)| = \frac{-3}{\sqrt{2}} < 0$.

La norme euclidienne n'est donc pas une entropie pour (1).

3. Il suffit alors de poser

$$A = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec A_2 la matrice de la question précédente et de considérer le vecteur $U_0 = (1, -1, 0, \dots, 0)$.

4. (a) D'après la question 11, A a toutes ses valeurs propres de partie réelle négative.

D'après la question 8, A est semblable à une matrice \tilde{A} qui satisfait l'hypothèse de la question 10. Il existe $P \in \text{GL}_d(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}\tilde{A}P$ et en posant $\mathcal{N}_0(U) = |PU|_{\mathbb{C}}$, on a

$$\forall t \geq 0, \mathcal{N}_0(U(t)) \leq e^{(\sigma+d\varepsilon)t} \mathcal{N}_0(U_0)$$

avec $\sigma = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (\text{Re}(\lambda))$.

En effet, la solution à (1) avec \tilde{A} à la place de A et de donnée initiale PU_0 est $PU(t)$ et donc, d'après la question 10,

$$\forall t \geq 0, |PU(t)| \leq e^{(\sigma+d\varepsilon)t} |PU_0|.$$

Si maintenant \mathcal{N} est une autre norme sur \mathbb{R}^d , il suffit d'utiliser l'équivalence des normes \mathcal{N}_0 et \mathcal{N} pour obtenir l'existence de $C > 1$ telle que

$$\forall t \geq 0, \mathcal{N}(U(t)) \leq C e^{(\sigma+d\varepsilon)t} \mathcal{N}(U_0)$$

puis de choisir ε tel que $-\lambda = \sigma + d\varepsilon < 0$ pour obtenir le résultat souhaité.

Remarque : L'énoncé proposé est faux ; il suffit de choisir la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ pour constater que l'inégalité proposée n'est valable que pour $t \geq 0$.

(b) **Il y a visiblement une erreur d'énoncé ! Démontrons plutôt que $-\lambda_0$ est la plus grande des parties réelles des valeurs propres de A .**

Soit μ une valeur propre de A et $X = X_1 + iX_2$, avec $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^d$ un vecteur propre associé.

On a alors, pour $i = 1, 2$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\exp(tA)X_i| \leq C e^{-\lambda t} |X_i|$$

et donc, pour un certain $C' > 1$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{\text{Re}(\mu)t} |X|_{\mathbb{C}} = |\exp(tA)X|_{\mathbb{C}} \leq C' e^{-\lambda t} |X|_{\mathbb{C}}.$$

On en déduit donc $\text{Re}(\mu) \leq -\lambda$ puis, μ et λ étant quelconques, $\max_{\mu \in \text{Sp}(A)} \text{Re}(\mu) \leq -\lambda_0$.

Soit d'autre part $\lambda > 0$ tel que (4) est vraie. En appliquant l'inégalité avec une donnée initiale égale à $\exp(-tA)U_0$, on obtient qu'il existe $C \geq 1$ telle que

$$\forall t \geq 0, \forall U_0 \in \mathbb{R}^d, C^{-1} e^{\lambda t} \mathcal{N}(U_0) \leq \mathcal{N}(\exp(-tA)U_0).$$

Un raisonnement très similaire à celui effectué plus haut nous fournit alors $\lambda \leq -\text{Re}(\mu)$ quelque soit μ valeur propre de A puis, par passage au supremum,

$$\lambda_0 \leq - \max_{\mu \in \text{Sp}(A)} \text{Re}(\mu),$$

ce qui fournit la relation voulue.

(c) La réponse est non. En effet, il suffit de considérer la matrice A de la question 2 pour laquelle $\lambda_0 = 1$ et cependant $t \mapsto |U(t)|e^t$ n'est pas bornée dès que $U_0 = (u_1, u_2)$ vérifie $u_2 \neq 0$.

(d) (ii) \Rightarrow (i) Fixons $U_0 \in \mathbb{R}^d$ et considérons $U(t+s)$ la solution de (1) avec pour donnée initiale $U(t)$. On a d'abord, pour tout $s \geq 0$,

$$e^{\lambda s} \mathcal{N}(U(t+s)) \leq \mathcal{N}(U(t))$$

et donc

$$\mathcal{N}(U(t)) + \lambda \frac{d}{dt} \mathcal{N}(U(t)) = \frac{d}{ds} (e^{\lambda s} \mathcal{N}(U(t+s)))|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda s} \mathcal{N}(U(t+s)) - \mathcal{N}(U(t))}{s} \leq 0$$

ce qui fournit bien, puisque $\lambda > 0$ et $\mathcal{N}(U(t)) > 0$, $\frac{d}{dt} \mathcal{N}(U(t)) < 0$.

(i) \Rightarrow (ii) On a d'abord

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N}(U(t))^2 = \frac{\langle AU(t), U(t) \rangle_{\mathcal{N}}}{\langle U(t), U(t) \rangle_{\mathcal{N}}^{1/2}}$$

et donc par hypothèse, pour tout $U_0 \in \mathbb{R}^d$ telle que $\mathcal{N}(U_0) = 1$, $\langle AU_0, U_0 \rangle_{\mathcal{N}} < 0$.

L'application $U \mapsto \langle AU, U \rangle_{\mathcal{N}}$ étant continue sur la sphère unité de \mathcal{N} , compacte, il existe donc $\lambda > 0$ tel que

$$\forall U_0 \text{ tel que } \mathcal{N}(U_0) = 1, \langle AU_0, U_0 \rangle_{\mathcal{N}} \leq -\lambda \Leftrightarrow \forall U_0 \neq 0, \frac{\langle AU_0, U_0 \rangle_{\mathcal{N}}}{\langle U_0, U_0 \rangle_{\mathcal{N}}} \leq -\lambda.$$

On a ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt} \mathcal{N}(U(t)) \leq -\lambda \mathcal{N}(U(t))$$

ce qui montre (ii) d'après la question 1.9.

(e) On a d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{N}_A(U(t))^2 = \int_0^{+\infty} |\exp(sA)U(t)|^2 ds = \int_t^{+\infty} |U(s)|^2 ds$$

puisque $\exp(sA)U(t) = U(t+s)$ (ces deux solutions de (1) ont toutes pour donnée initiale $U(s)$). Ainsi, si $U_0 \neq 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt} \mathcal{N}_A(U(t))^2 = -|U(t)|^2 < 0$$

puisque d'après Cauchy-Lipschitz U ne s'annule pas. (1) possède donc une entropie stricte.

5. On a, pour tout $U = (u_1, u_2)$ et $V = (v_1, v_2)$ de \mathbb{R}^2 ,

$$\mathcal{N}_A(U, V) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} [(u_1 + 3tu_2)(v_1 + 3tv_2) + u_2v_2] dt = \frac{1}{2}(u_1v_1 + u_2v_2) + \frac{3}{4}(u_2v_1 + u_1v_2) + \frac{9}{4}u_2v_2$$

puisque $\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$, $\int_0^{+\infty} te^{-2t} dt = \frac{1}{4}$ et $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-2t} dt = \frac{2!}{8} = \frac{1}{4}$.

6. Tout d'abord, puisque (1) est irréversible bien orienté, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(U(t)) = g(0) = 1$$

par continuité de g en 0. $f(t, \cdot)$ converge donc simplement vers 1 lorsque t tend vers 0.

D'autre part, g étant bornée, f l'est également et le théorème de convergence dominée nous fournit directement

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(t, x) \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1.$$

3 Matrices et hypocoercivité

1. Si la norme euclidienne usuelle est une entropie de (1) alors, en notant $X(t)$ la solution de donnée initiale X , on a pour tout t réel,

$$0 \geq \frac{d}{dt} |X(t)|^2 = \frac{d}{dt} \langle X(t), X(t) \rangle = 2 \langle AX(t), X(t) \rangle$$

et en choisissant $t = 0$, on a bien $\langle AX, X \rangle \leq 0$.

Le même raisonnement nous montre également que si $|\cdot|$ est une entropie stricte de (1) alors

$$\forall X \in \mathbb{R}^d, \langle AX, X \rangle < 0.$$

Réciproquement, si $\langle AX, X \rangle \leq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^d$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt} |X(t)|^2 = 2 \langle AX(t), X(t) \rangle \leq 0$$

et $t \mapsto |X(t)|$ est bien une fonction décroissante par composition. $|\cdot|$ est bien une entropie pour (1).

Le même raisonnement nous fournit encore que si $\langle AX, X \rangle < 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^d$ alors $|\cdot|$ est une entropie stricte pour (1).

2. Soit $X \in \mathbb{R}^d$, $X \neq 0$. On a

$$\langle AX, X \rangle = \langle SX, X \rangle + \langle KX, X \rangle = \langle SX, X \rangle$$

puisque $\langle KX, X \rangle = \langle X, {}^t KX \rangle = -\langle KX, X \rangle$.

De plus, puisque S est symétrique réelle, il existe $O \in O_d(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telles que ${}^tOSO = -D$. On a ainsi

$$\langle SX, X \rangle = -\langle DOX, OX \rangle$$

puis, en posant $(y_1, \dots, y_d) = Y = OX \neq 0$,

$$\langle SX, X \rangle = - \sum_{i=1}^d \lambda_i y_i^2 < 0.$$

Finalement, $|\cdot|$ est bien une entropie stricte du système (1) d'après la question précédente et d'après la question 2.4.(d), le système (1) est irréversible bien orienté.

3. On a d'abord, pour tout $X = (x_1, x_2)$ de \mathbb{R}^2 ,

$$\langle AX, X \rangle = \langle T_0X, X \rangle + \langle L_0X, X \rangle$$

et puisque T_0 est antisymétrique, $\langle T_0X, X \rangle = 0$ et

$$\langle AX, X \rangle = -x_2^2 \leq 0.$$

$|\cdot|$ est bien entropie pour le système mais pas une entropie stricte (car $\langle AX, X \rangle = 0$ pour $X = (1, 0)$). A est donc hypocoercive.

Soient $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ la solution de (1) associée.

D'après ce qui précède, on a déjà, pour tout t réel

$$\frac{d}{dt} |X(t)|^2 = 2 \langle AX(t), X(t) \rangle = -2(x_2(t))^2$$

et de plus, en posant $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$, un calcul immédiat nous fournit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt} \langle SX(t), X(t) \rangle = 2 \langle SAX(t), X(t) \rangle = -2(x_1(t))^2.$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}_A(X)^2 = \int_0^{+\infty} (x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 dt = -\frac{1}{2} [\int_0^{+\infty} |X(t)|^2 + \langle SX(t), X(t) \rangle dt] = \frac{1}{2} (3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2).$$

4. Il y a visiblement une erreur de définition de A . En effet, A admet pour valeurs propres les $1 + \lambda_i$ avec $i \geq 3$ et d'après la question 1.11, (1) n'est pas irréversible mal orienté si $d \geq 3$ et $\lambda_i = -1/2$ pour $i \geq 3$.

On suppose donc plutôt que $A = T + L$ avec $T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il suffit d'après la question 1.11 de constater que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

On calcule donc le polynôme caractéristique de A qui vaut, en développant par rapport à la dernière colonne et par une récurrence immédiate,

$$\chi_A(X) = \prod_{i=3}^d (X - \lambda_i) \begin{vmatrix} X & -1 \\ 1 & X - \lambda_2 \end{vmatrix} = (X^2 - \lambda_2 X + 1) \prod_{i=3}^d (X - \lambda_i).$$

Ses racines sont les λ_i avec $i \geq 3$ et les nombres

$$x_{\pm} = \frac{\lambda_2 \pm \delta}{2}$$

avec δ une racine carrée (éventuellement complexe) de $\lambda_2^2 - 4$. Distinguons néanmoins les cas.

Si $-2 \leq \lambda_2 < 0$ alors la partie réelle de δ est nulle et donc $\text{Re}(x_{\pm}) < 0$.

Sinon $\lambda_2 < -2$ et alors, puisque $\delta = \pm \sqrt{\lambda_2^2 - 4} < |\lambda_2| = -\lambda_2$, on a $\text{Re}(x_{\pm}) < 0$.

(1) est donc irréversible bien orienté.

5. Pour $X = (x_1, \dots, x_d)$, on a directement

$$\langle AX, X \rangle = \lambda_2 x_2^2 + \sum_{i=3}^d \lambda_i x_i^2 \leq 0$$

et de plus, pour $X = (1, 0, \dots, 0) \neq 0$, $\langle AX, X \rangle = 0$. A est donc une matrice hypocoercive.

6. Si $\text{Ker}(N^2) = \text{Ker}(N)$ on aurait alors $\text{Ker}(N^k) = \text{Ker}(N^{k+1})$ pour tout k par une récurrence immédiate et ainsi $\text{Ker}(N) = \mathbb{R}^d$, ce qui est absurde puisque N n'est pas nulle.

Il existe donc e_2 tel que $Ne_2 = e_1 \neq 0$ et $N^2e_2 = Ne_1 = 0$.

On a alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle N(\lambda e_1 + e_2), \lambda e_1 + e_2 \rangle = \langle e_1, \lambda e_1 + e_2 \rangle = \lambda |e_1|^2 + \langle e_1, e_2 \rangle$$

et il en résulte, puisque $|e_1| \neq 0$, l'assertion que l'on voulait démontrer.

Remarque : l'indication fournie par l'énoncé n'est pas correcte à moins que $\|N\| \geq 1$.

7. Calculons d'abord, pour $X \in \mathbb{R}^d$ $\langle AX, X \rangle$. Puisque K est antisymétrique, on a d'abord

$$\langle AX, X \rangle = \langle SX, X \rangle + \kappa \langle NX, X \rangle.$$

Ainsi, $|\cdot|$ est une entropie pour le système (1) si et seulement si

$$\forall X \in \mathbb{R}^d, \kappa \langle NX, X \rangle \leq \mathcal{N}_0(X)^2$$

(avec \mathcal{N}_0 la norme associée au produit scalaire $(X, Y) \mapsto \langle -SX, Y \rangle$) soit encore

$$\kappa \max_{X \in S_0} \langle NX, X \rangle \leq 1$$

où l'on a noté S_0 la sphère unité de \mathbb{R}^d relativement à \mathcal{N}_0 .

Le réel $\kappa_0 = (\min_{X \in S_0} \langle NX, X \rangle)^{-1}$ est alors bien défini d'après la question précédente (il est strictement positif), on a bien démontré que la norme euclidienne est une entropie si et seulement si $\kappa \leq \kappa_0$.

Le raisonnement précédent nous montre de plus que si $\kappa < \kappa_0$ alors la norme euclidienne est une entropie stricte.

Remarque : il y a encore une erreur d'énoncé (pour $\kappa = \kappa_0$, on a une contradiction manifeste) !

8. Soit A une matrice irréversible bien orientée. D'après la question 2.4.(e), A possède une entropie stricte associée à un produit scalaire. Si $S \in S_d^+(\mathbb{R})$ est la matrice de ce produit scalaire, on a alors (de même qu'à la question 1 et par compacité de la sphère unité),

$$\max_{|X|=1} \langle SAX, X \rangle < 0.$$

Si maintenant B est suffisamment proche de A pour la norme $\|\cdot\|$, on aura également

$$\max_{|X|=1} \langle SBX, X \rangle < 0$$

puisque pour tout X tel que $|X| = 1$

$$\langle SBX, X \rangle - \langle SAX, X \rangle \leq \|SB - SA\| \leq \|S\| \|B - A\|.$$

D'après la question 1, la norme du produit scalaire associé à S reste une entropie stricte pour B et B est donc irréversible bien orienté.

9. On a, d'après la question 1,

$$E = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \langle AX, X \rangle \leq 0 \forall X \in \mathbb{R}^d\} = \bigcap_{X \in \mathbb{R}^d} \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \langle AX, X \rangle \leq 0\}.$$

E est alors un fermé comme intersection de fermés (les applications $A \mapsto \langle AX, X \rangle$ sont linéaires donc continues).

De même d'après la question 1 et par compacité de la sphère unité,

$$E^0 = \left\{ A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \max_{|X|=1} \langle AX, X \rangle < 0 \right\}$$

et la preuve du caractère ouvert de E^0 est celle de la question précédente avec $S = I_d$.

Soient maintenant $A, B \in E^0$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $\lambda A + (1 - \lambda)B \in E^0$.

On peut supposer $\lambda \neq 0, 1$ et pour $X \in \mathbb{R}^d, X \neq 0$, on a alors

$$\langle \lambda A + (1 - \lambda)B, X \rangle = \lambda \langle AX, X \rangle + (1 - \lambda) \langle BX, X \rangle < 0.$$

Le caractère convexe de E^0 est donc démontré et on démontre celui de E de manière identique.

10. **L'ensemble F n'est même pas convexe si $d \geq 2$!**

En effet $A = \text{Diag}(0, -\text{Id}_{d-1}) \in F$ et $B = \text{Diag}(-\text{Id}_{d-1}, 0) \in F$ mais $\frac{A+B}{2} = \text{Diag}(-1/2, -1/2, -\text{Id}_{d-2})$ n'appartient pas à ∂E .

L'étude de ses points extrémaux est donc sans intérêt.