Corrigé de l'épreuve de maths 2 - e3a - MP - 2017

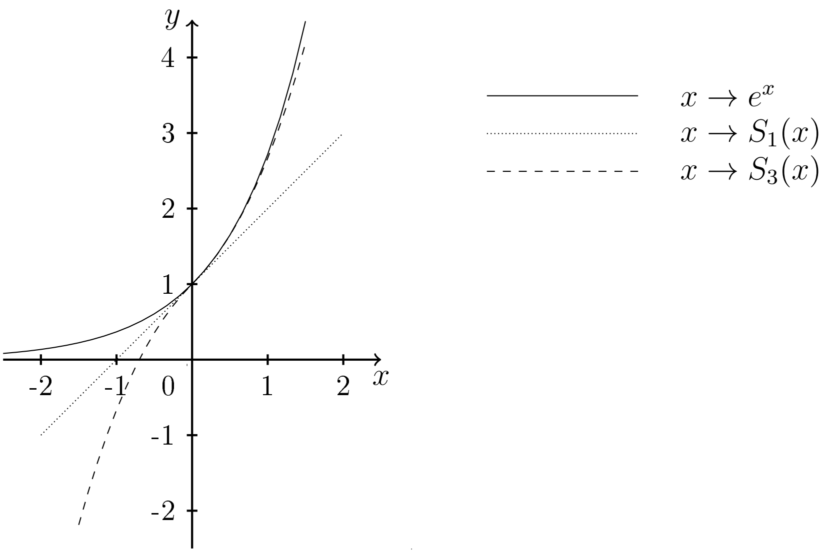
Partie I

1. L'application φ est linéaire et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc
   $\boxed{\varphi \text{ induit sur } \mathbb{R}_n[X] \text{ un endomorphisme.}}$.
2. $\varphi(1) = 1$ et $\forall i \geqslant 1$, $\varphi(X^i) = X^i - iX^{i-1}$. On en déduit la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. La matrice de φ_n est triangulaire supérieure, elle porte donc les valeurs propres de φ sur sa diagonale. $\boxed{\text{La seule valeur prope de } \varphi_n \text{ est } 1}$
   $\varphi_n(P) = P \Leftrightarrow P' = 0$ donc $\boxed{E_1 = \operatorname{Vect}(1)}$.
   $\dim E_1 = 1$, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ et $n > 0$ donc la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas égale à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc $\boxed{\varphi_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$
4. De la question 2., on déduit $\det(\varphi_n) = 1 \neq 0$. $\boxed{\varphi_n \text{ est donc un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$
5. φ_n étant une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$,
   $\boxed{\text{il existe une unique famille de polynômes } s_0, s_1, \cdots, s_n \text{ telle que } \forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}.}$
   ${\varphi_n}^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\left(1, \frac{X}{1!}, \cdots, \frac{X^n}{n!}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc
   $\boxed{(s_0, s_1, \cdots, s_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$
6. En développant, on trouve $(Id - \delta) \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id - \delta^{n+1}$, or $\delta^{n+1} = 0$ (dérivée $n+1$ème d'un polynôme de degré $\leqslant n$) et donc $\boxed{(Id - \delta) \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id.}$
7. La relation précédente peut aussi s'écrire $\varphi_n \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id$
   et donc $\varphi_n^{-1} = Id + \delta + \cdots + \delta^n$.
   Pour tout entier i dans $[\![0, n]\!]$, on a donc
   $$s_i = \varphi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = (Id + \delta + \cdots + \delta^n)\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \frac{X^i}{i!} + \frac{X^{i-1}}{(i-1)!} + \cdots + \frac{X}{1!} + 1 = \sum_{k=0}^{i} \frac{X^k}{k!}$$
   $$\boxed{s_i = \sum_{k=0}^{i} \frac{X^k}{k!}}$$

Partie II.

8. $S_3'(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2} = \left(1 + \frac{X}{2}\right)^2 + \frac{X^2}{4} > 0$.
   On en déduit le tableau de variations de S_3 :

x	$-\infty$ $\quad\alpha_3\quad$ $+\infty$
$S'_3(x)$	$+$
$S_3(x)$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$



9. On remarque que la dérivée de S_n est S_{n-1}.
   On fait une démonstration par récurrence en posant HR(n) : « le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. »
   De façon évidente, HR(0) et HR(1) sont vraies.
   Supposons HR(n) vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

   Si $n+1$ **est impair :** $S'_{n+1} = S_n$, d'après l'hypothèse de récurrence, S_n n'a pas de racine réelle et et $S_n(0) = 1$, donc S_n est constamment > 0.
   On en déduit son tableau de variations :

x	$-\infty$ $\quad\alpha_{n+1}\quad$ $+\infty$
$S'_{n+1}(x)$	$+$
$S_{n+1}(x)$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$

   S_{n+1} possède donc une unique racine réelle simple.

   Si $n+1$ **est pair :** $S'_{n+1} = S_n$, d'après l'hypothèse de récurrence, S_n possède une unique racine réelle simple α_n et $S_{n+1}(\alpha_n) = S_n(\alpha_n) + \dfrac{\alpha_n}{n!} = \dfrac{{\alpha_n}^{n+1}}{(n+1)!} > 0$.
   On en déduit son tableau de variations :

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
$S'_{n+1}(x)$		$-$	0	$+$	
$S_{n+1}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	> 0	$\nearrow$	$+\infty$

   S_{n+1} ne possède donc aucune racine réelle.

Finalement, d'après le principe de récurrence,

$\boxed{\text{le polynôme } S_n \text{ n'a pas de racine réelle si } n \text{ est pair et a une unique racine réelle simple si } n \text{ est impair.}}$

10. (a) $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) = S_{2n-1}(\alpha_{2n-1}) + \dfrac{{\alpha_{2n-1}}^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{{\alpha_{2n-1}}^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$= \dfrac{{\alpha_{2n-1}}^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{{\alpha_{2n-1}}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{{\alpha_{2n-1}}^{2n}}{(2n)!}\left(1+\dfrac{\alpha_{2n-1}}{2n+1}\right).$

Or, par hypothèse, toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$ donc $|\alpha_{2n-1}| < 2n-1$ d'où l'on déduit $1+\dfrac{\alpha_{2n-1}}{2n+1} > 0$ et $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) > 0$.

La fonction S_{2n+1} est strictement croissante, $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) > 0$ et $S_{2n+1}(\alpha_{2n+1}) = 0$ on a donc $\alpha_{2n-1} > \alpha_{2n+1}$ et donc $\boxed{\text{la suite } (\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

(b) i. La suite (v_m) est convergente, donc elle est bornée et il existe un réel $A > 0$ tel que $\forall m \in \mathbb{N},\ |v_m| \leqslant A$.

La série $\sum \dfrac{A^k}{k!}$ converge, donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier naturel M tel que : $\forall m \in \mathbb{N},\ m > M \Rightarrow \left|\displaystyle\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right| < \varepsilon$.

Soit $m > M$, $|S_m(v_m) - e^{v_m}| = \left|\displaystyle\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{{v_m}^k}{k!}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|v_m|^k}{k!} \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Pour tout réel } \varepsilon > 0, \text{ il existe donc un entier naturel } M \text{ tel que : } \forall m \in \mathbb{N},\ m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon}$

et donc $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} S_m(v_m) - e^{v_m} = 0$.

ii. $S_m(v_m) = S_m(v_m) - e^{v_m} + e^{v_m}$, or $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} S_m(v_m) - e^{v_m} = 0$ et $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} e^{v_m} = e^l$ donc $\boxed{\text{la suite } (S_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } e^l.}$

(c) Si on suppose que la suite (α_{2n+1}) converge vers un réel l, alors, en définissant (v_m) par $v_{2n} = v_{2n+1} = \alpha_{2n+1}$ pour tout entier n, la suite (v_m) converge également vers l et donc la suite $(S_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^l.

Or, pour tout entier m, $S_{2m+1}(v_{2m+1}) = S_{2m+1}(\alpha_{2m+1}) = 0$, par passage à la limite on obtient $e^l = 0$ ce qui est impossible donc (α_{2n+1}) diverge.

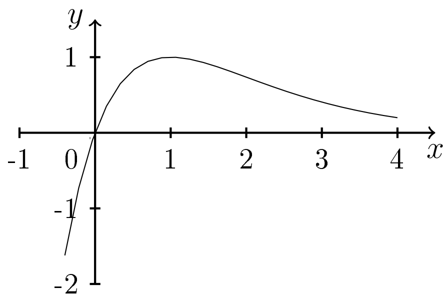
Etant décroissante, $\boxed{\text{la suite } (\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } -\infty.}$

Partie III.

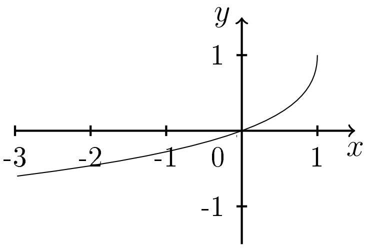
11. $h(x) = xe^{1-x}$, $h'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

On en déduit le tableau de variations et le graphe de h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



12. D'après l'étude précédente, la fonction h est bijective de $]-\infty,1[$ sur $]-\infty,1[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et h' ne s'annule pas.
Soit g la bijection réciproque. g est donc bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-\infty,1[$ dans $]-\infty,1[$ et $\forall x \in]-\infty,1[,\ h(g(x)) = x$.
Graphe de g :



13. h est bijective de $]-\infty,1[$ sur $]-\infty,1[$, il existe donc un unique nombre réel $\rho \in]-\infty,1[$ tel que $h(\rho) = -1$, d'autre part si $x \geqslant 1$, alors $h(x) > 0$ donc $h(x) \neq -1$.
$\boxed{\text{Il existe donc un unique nombre réel } \rho \text{ tel que } h(\rho) = -1.}$

14. $h(-1/2) = -\dfrac{1}{2}e^{3/2}$, or, on sait que $e > 2$, on en déduit $e^3 > 4$, $e^{3/2} > 2$ et $-\dfrac{1}{2}e^{3/2} < -1$. Donc $h(-1/2) < -1$.
$h(-1/4) = -\dfrac{1}{4}e^{5/4}$, or, on nous donne $\ln 2 \geqslant \dfrac{13}{20} \geqslant \dfrac{5}{8}$, on en déduit $\dfrac{5}{4} < 2\ln 2$, $e^{5/4} < 4$ et $-\dfrac{1}{4}e^{5/4} > -1$. Donc $h(-1/4) > -1$.
D'après les variations de h, $\boxed{\rho \text{ est dans l'intervalle }]-1/2,-1/4[.}$

15. Soit z un nombre complexe tel que : $|z| \leqslant 1$ et $|ze^{1-z}| \leqslant 1$. Soit n un entier naturel.
   (a) $$(ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} = e^{-nz} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k z^k}{k!} = e^{-nz} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k z^k}{k!} \right)$$
   $$= e^{-nz}\left(e^{nz} - T_n(z)\right) = 1 - e^{-nz}T_n(z)$$
   On a bien l'égalité : $\boxed{1 - e^{-nz}T_n(z) = (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}.}$
   (b) $$|1 - e^{-nz}T_n(z)| = \left| (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} \right| \leqslant |(ze^{1-z})|^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} |z|^{k-n}$$
   $$\leqslant e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \text{ car } |z| \leqslant 1 \text{ et } |ze^{1-z}| \leqslant 1.$$
   Or $$e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = e^{-n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \right) = e^{-n}\left(e^n - T_n(1)\right) = 1 - e^{-n}T_n(1)$$
   et donc $\boxed{|1 - e^{-nz}T_n(z)| \leqslant 1 - e^{-n}T_n(1).}$
   (c) Si $T_n(z) = 0$, alors $1 \leqslant 1 - e^{-n}T_n(1)$ et donc $e^{-n}T_n(1) \leqslant 0$, ce qui est impossible car $e^{-n} > 0$ et $T_n(1) > 0$. On a donc $\boxed{T_n(z) \neq 0.}$

16. Soit n un entier naturel impair $\geqslant 3$.
Dans les questions précédentes, on a montré que si z est un nombre complexe tel que $|z| \leqslant 1$ et $|ze^{1-z}| \leqslant 1$, alors $T_n(z) \neq 0$.
D'autre part, $T_n\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = S_n(\alpha_n) = 0$. On a donc $\left|\dfrac{\alpha_n}{n}\right| > 1$ ou $\left|\dfrac{\alpha_n}{n} e^{1-\frac{\alpha_n}{n}}\right| > 1$.

On a admis que toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$, donc $\left|\frac{\alpha_n}{n}\right| < 1$ et par conséquent on a $\left|\frac{\alpha_n}{n}e^{1-\frac{\alpha_n}{n}}\right| > 1$ c'est à dire $\left|h\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\right| > 1$.

D'après les variations de la fonction h, on a donc $\frac{\alpha_n}{n} < \rho$ et comme $|\alpha_n| < n$,

$\boxed{\alpha_n \text{ est bien dans l'intervalle }]-n, n\rho[.}$

Partie IV.

17. Pour $u \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(u) = e^{-u}S_n(u) - 1 - \frac{1}{n!}\int_u^0 t^n e^{-t}dt$.

$u \mapsto \int_u^0 t^n e^{-t}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u \mapsto -u^n e^{-u}$ donc f_n est dérivable et pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(u) = -e^{-u}S_n(u) + e^{-u}S_{n-1}(u) + \frac{1}{n!}u^n e^{-u} = e^{-u}\left(-S_n(u) + S_{n-1}(u) + \frac{u^n}{n!}\right)$$
$$= e^{-u}\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^k}{k!} + \frac{u^n}{n!}\right) = 0.$$

D'autre part, $f_n(0) = S_n(0) - 1 = 0$. f_n est donc la fonction nulle et donc pour tout nombre réel u et tout entier naturel n, on a bien

$$\boxed{e^{-u}S_n(u) = 1 + \frac{1}{n!}\int_u^0 t^n e^{-t}dt.}$$

18. Soit m un entier naturel et $n = 2m+1$.

$S_n(\alpha_n) = 0$, donc d'après la question précédente, on a : $-1 = \frac{1}{n!}\int_{\alpha_n}^0 t^n e^{-t}dt$

On fait le changement de variables $t = nu$ dans l'intégrale, on obtient :

$$-1 = \frac{1}{n!}\int_{\gamma_n}^0 n^n u^n e^{-nu} n du$$

On en déduit : $-1 = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_{\gamma_n}^0 u^n e^{-nu}du = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!}\int_{\gamma_n}^0 u^n e^{n(1-u)}du = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!}\int_{\gamma_n}^0 h(u)^n du$

On a donc $\boxed{\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n dt = -\frac{n!e^n}{n^{n+1}}.}$

19. On utilise la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

$$\frac{n!e^n}{n^{n+1}} \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^n}{n^{n+1}} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{n} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\boxed{\text{La suite } \left(\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1}dt\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge donc vers 0.}}$$

20. Dans la question 16., on a montré que pour tout entier $n \geqslant 3$ impair, $\alpha_n < n\rho$, et d'après les variations de h, on a $\rho < 0$ donc $\gamma_{2m+1} = \frac{\alpha_{2m+1}}{2m+1} < \rho < 0$.

D'autre part, sur $\mathbb{R}^-$, h est négative.

On en déduit :

$$\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1}dt = \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}dt + \int_{\rho}^0 h(t)^{2m+1}dt \leqslant \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}dt \leqslant 0$$

Or $\lim_{m\to+\infty}\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1}dt = 0$ et donc $\boxed{\text{la suite } \left(\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}dt\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0.}}$

21. $\forall t \in [\gamma_{2m+1}, \rho]$, $h(t) \leqslant -1$ donc $h(t)^{2m+1} \leqslant -1$, et donc

$$\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1} dt \leqslant -(\rho - \gamma_{2m+1}) < 0,$$

or $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1} dt = 0$ donc $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \gamma_{2m+1} = \rho$

On a donc $\boxed{\alpha_{2m+1} \sim (2m+1)\rho \sim 2m\rho.}$

Partie V.

22. Soit p un entier naturel non nul, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des nombres complexes de module $\leqslant 1$ et $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des nombres réels > 0 tels que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i = \left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \theta_i |\alpha_i| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \theta_i.$

Si l'un des α_i a un module < 1, la dernière inégalité est stricte et on a une contradiction.

$\boxed{\alpha_1, \ldots, \alpha_p \text{ sont donc des nombres complexes de module exactement } 1.}$

(b)

$$\begin{aligned}
& |\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2 = (\theta_1 + \theta_2)^2 \\
\Longrightarrow \ & {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + 2\theta_1\theta_2 \cos t = {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + 2\theta_1\theta_2 \\
\Longrightarrow \ & \cos t = 1 \quad \text{car } \theta_1\theta_2 > 0 \\
\Longrightarrow \ & \boxed{\alpha_2 = 1}
\end{aligned}$$

(c) On procède de la même façon en posant pour tout k, $\alpha_k = e^{it_k}$.

$$\begin{aligned}
& \left|\sum_{k=1}^{n} \theta_k e^{it_k}\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right)^2 \\
\Longrightarrow \ & \sum_{k=1}^{n} {\theta_k}^2 + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \theta_k \theta_l e^{it_k} e^{-it_l} + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \theta_k \theta_l e^{-it_k} e^{it_l} = \sum_{k=1}^{n} {\theta_k}^2 + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \theta_k \theta_l \\
\Longrightarrow \ & 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \theta_k \theta_l \cos(t_k - t_l) = 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \theta_k \theta_l \\
\Longrightarrow \ & \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \theta_k \theta_l (1 - \cos(t_k - t_l)) = 0 \\
\Longrightarrow \ & \forall k, l \in [\![1, n]\!], \quad \cos(t_k - t_l) = 1 \quad \text{car } \theta_k\theta_l > 0 \text{ et } 1 - \cos(t_k - t_l) \geqslant 0 \\
\Longrightarrow \ & \forall k, l \in [\![1, n]\!], \quad t_k - t_l \in 2\pi\mathbb{Z} \\
\Longrightarrow \ & \boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p}
\end{aligned}$$

23. (a) $P(0) = a_0 > 0$.

$\displaystyle P(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k > a_0 > 0.$

$\boxed{\text{Ni } 0, \text{ ni } 1, \text{ ne sont donc racines de } P.}$

(b) $\boxed{(X-1)P(X) = a_n X^{n+1} + (a_{n-1} - a_n)X^n + \cdots + (a_1 - a_2)X^2 + (a_0 - a_1)X - a_0.}$

(c) Considérons une racine α de P. On suppose $|\alpha| \leqslant 1$.

α est aussi racine de $(X-1)P(X)$, et comme $a_0 = a_1$, on a :

$a_n \alpha^{n+1} + (a_{n-1} - a_n)\alpha^n + \cdots + (a_1 - a_2)\alpha^2 = a_0$

D'autre part, $a_n + (a_{n-1} - a_n) + \cdots + (a_1 - a_2) = a_1 = a_0$.

On a donc : $a_n\alpha^{n+1} + (a_{n-1} - a_n)\alpha^n + \cdots + (a_1 - a_2)\alpha^2 = a_n + (a_{n-1} - a_n) + \cdots + (a_1 - a_2)$.

On peut donc appliquer la question 22. en posant $\theta_n = a_n$, $\theta_k = a_k - a_{k+1}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $\alpha_k = a^{k-1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres complexes de module $\leqslant 1$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n$ des nombres réels > 0.

On en déduit $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ c'est à dire $\alpha^2 = \alpha^3 = \cdots \alpha^{n+1}$ ce qui est impossible car $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

$\boxed{\text{Les racines complexes de } P \text{ ont donc un module} > 1.}$

24. $Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ avec $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$.

    $a_0 > 0$ donc 0 n'est pas racine de Q.

    α est racine de Q si et seulement si $\frac{1}{\alpha}$ est racine du polynôme $a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$ qui vérifie les hypothèses de la question 23.

    On en déduit $\left|\frac{1}{\alpha}\right| > 1$ et donc $|\alpha| < 1$

    $\boxed{\text{Les racines complexes de } Q \text{ ont donc un module} < 1.}$

25. $T_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} X^k$. Posons $a_k = \dfrac{n^k}{k!}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

    On alors $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$, d'après la question précédente, toutes les racines complexes de T_n ont donc un module < 1 et donc

    $\boxed{\text{toutes les racines complexes du polynôme } S_n \text{ ont un module} < n.}$