CCP 2007. Filière MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I. Description des normes euclidiennes

1. Identité du parallélogramme.

a. Si N est une norme euclidienne attachée au produit scalaire φ alors :
$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = \varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2\Big(\varphi(x,x) + \varphi(y,y)\Big) = 2\Big(N(x)^2 + N(y)^2\Big)$ $\square$

$\|e_1 + e_2\|_\infty^2 + \|e_1 - e_2\|_\infty^2 = 2$ et $2\Big(\|e_1\|_\infty^2 + \|e_2\|_\infty^2\Big) = 4$ donc $\|.\|_\infty$ n'est pas euclidienne.

b. $\|.\|_2$ est naturellement euclidienne car attachée au produit scalaire canonique. $\square$

Pour $p > 1$ on a $\|e_1 + e_2\|_p^2 + \|e_1 - e_2\|_p^2 = 2 \times 2^{2/p}$ et $2\Big(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2\Big) = 2 \times 2$.
Donc si $p \neq 2$ la norme $\|.\|_p$ n'est pas euclidienne. $\square$

2. $< . >_S$ est clairement bilinéaire.
Elle est symétrique car, du fait que ${}^tXSY$ est un réel il est égal à sa transposée, donc (en utilisant que S est symétrique) : $< x, y >_S = {}^tXSY = {}^t({}^tXSY) = {}^tY{}^tSX = {}^tYSX = < y, x >_S$.
Elle est définie positive car $< x, x >_S = {}^tXSX > 0$ pour $X \neq 0$ du fait que S est symétrique définie positive. $\square$

3. Par bilinéarité de φ, il vient $\varphi(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi(e_i,e_j)x_iy_j\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(x_i\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi(e_i,e_j)y_j\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iz_i = {}^tXZ$
avec $z_i = \sum\limits_{j=1}^{n}\varphi(e_i,e_j)y_j$ i.e. $Z = SY$. Ainsi $\varphi(x,y) = {}^tXSY$.
La matrice S est évidemment symétrique par définition et définie positive compte tenu de l'égalité ci-dessus. $\square$

II. Quelques généralités et exemples.

4. $\text{Isom}(N)$ est non vide car contient Id_E et est bien inclus dans $\text{GL}(E)$ car une isométrie est clairement injective donc bijective (dimension finie).
Par ailleurs $\text{Isom}(N)$ est clairement stable par composition et enfin si $u \in \text{Isom}(N)$ alors
$N\big(u(u^{-1}(x))\big) = N\big(u^{-1}(x)\big)$ soit $N(x) = N\big(u^{-1}(x)\big)$ donc $u^{-1} \in \text{Isom}(N)$.
Ainsi $\text{Isom}(N)$ est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$. $\square$

5. Une caractérisation géométrique des N-isométries.

- Soit u une isométrie. Il est immédiat que $u(\Sigma) \subset \Sigma$. Par ailleurs u^{-1} est également une isométrie donc $u^{-1}(\Sigma) \subset \Sigma$ d'où $u\Big(u^{-1}(\Sigma)\Big) \subset u(\Sigma)$ soit $\Sigma \subset u(\Sigma)$ (car $u\Big(u^{-1}(\Sigma)\Big) = (uou^{-1})(\Sigma) = Id(\Sigma) = \Sigma$). Ainsi $u(\Sigma) = \Sigma$.
- Réciproquement soit un endomorphisme u stabilisant la sphère unité. Soit x un élément quelconque non nul de E et soit $y = \dfrac{1}{N(x)}x$. Alors $y \in \Sigma$ donc $u(y) \in \Sigma$ i.e. $\dfrac{1}{N(x)}N\big(u(x)\big) = 1$ soit encore $N\big(u(x)\big) = N(x)$. Égalité encore vraie si $x = 0$. Donc u est bien une isométrie.
- Ainsi $\text{Isom}(N)$ est l'ensemble des endomorphismes de E stabilisant $\Sigma(N)$. $\square$

Remarque : on a en fait prouvé que si u est une isométrie $u(\Sigma) = \Sigma$ et que si u est un endomorphisme tel que $u(\Sigma) \subset \Sigma$ alors u est une isométrie (donc $u(\Sigma) = \Sigma$).

6. Notons $N = \|.\|_1$. Alors $\Sigma(N)$ est le carré de sommets $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$ conservé par la symétrie s mais pas par la rotation r. Ainsi s est une $\|.\|_1$-isométrie mais pas r. $\square$

7.

a. $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à S. Sa matrice étant symétrique dans une base orthonormée, il est ortho-diagonalisable.
On remarque que $u(e_2) = 2e_2$ et $u(e_1 + e_2 + e_3) = 2(e_1 + e_2 + e_3)$ ce qui prouve que 2 est valeur propre et que le sous-espace propre associé E_2 est de dimension au moins 2. Le spectre de u est donc $(2, 2, \lambda)$. Par invariance de la trace il vient que $\lambda = 4$. D'ailleurs on remarque $u(e_1 - e_3) = 4(e_1 - e_3)$.
Ainsi E_4 est dirigé par $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ et, puisque u est orthodiagonalisable, E_2 est le plan d'équation $x - z = 0$ dont une base orthonormée est constituée de $\varepsilon_2 = e_2$ et $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.

Ainsi en notant $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ la matrice de passage et $D = \operatorname{diag}(4,2,2)$, on a $S = PDP^{-1}$.

Or P est orthogonale car matrice de passage entre deux bases orthonormées donc $S = PD^tP$. $\square$

c. Ce qui précède prouve que q est définie positive (les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique canoniquement attaché sont strictement positives ou vérification immédiate à l'aide de la question précédente) donc la forme polaire définit un produit scalaire φ et alors $N_q = N_\varphi$. $\square$

d et e. $\Sigma(N)$ a pour équation dans la base orthonormée $\big(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\big)$: $4X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 = 1$ donc il s'agit d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est dirigé par ε_1 c'est à dire par $e_1 - e_3$. $\square$

f Il résulte alors de la question 5 que toute rotation d'axe $e_1 - e_3$ appartient à $\operatorname{Isom}(N_q)$ qui de ce fait est bien infini. $\square$

III. Étude de $\operatorname{Isom}(N)$ lorsque N est une norme euclidienne.

8. Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes.

a. Si un endomorphisme conserve le produit scalaire alors a fortiori il conserve le carré scalaire donc la norme.
Réciproquement si u conserve la norme alors :
$4 < u(x), u(y) >= N^2\big(u(x)+u(y)\big) - N^2\big(u(x)-u(y)\big) = N^2\big(u(x+y)\big) - N^2\big(u(x-y)\big) = N^2(x+y) - N^2(x-y) = 4 < x, y >$ donc u conserve le produit scalaire.
Ainsi un endomorphisme est une isométrie pour une norme euclidienne si et seulement si cet endomorphisme conserve le produit scalaire. $\square$

b. En traduisant matriciellement le résultat précédent il vient que u est une isométrie si et seulement si, pour tout couple (X, Y) de $M_{n,1}(\mathbb{R})$:
${}^t(AX)S(AY) = {}^tXSY$ i.e. si et seulement si ${}^tX({}^tASA)Y = {}^tXSY$.
En prenant en particulier $X = e_1$ et $Y = e_j$ l'égalité ci-dessus implique que les éléments d'indice (i,j) de ${}^tASA$ et de S sont égaux donc que les deux matrices sont égales. Cette condition étant par ailleurs évidemment suffisante pour avoir l'égalité ci-dessus.
Ainsi l'endomorphisme u est une N_S-isométrie si et seulement si sa matrice A dans la base canonique vérifie ${}^tASA = S$. $\square$

Remarque : on retrouve en particulier avec $S = Id$ que u est une isométrie pour le produit scalaire canonique si et seulement si sa matrice dans la base canonique est orthogonale.

9. En liaison avec la remarque précédente on a en particulier $\operatorname{ISOM}(\|.\|_2) = O_n(\mathbb{R})$. $\square$

Ce groupe est infini car il contient en particulier les matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ dont le cardinal est égal à celui de $[0, 2\pi[$. $\square$

10. Une application des polynômes interpolateurs.

a. Si $P \in \operatorname{Ker} u$ alors P est un polynôme de degré au plus r s'annulant en au moins $r+1$ réels deux à deux distincts donc P est le polynôme nul. Il en découle que u est injective donc est un isomorphisme puisque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie.
D'où l'existence et l'unicité du polynôme L cherché à savoir $L = u^{-1}(y_0, y_1, \ldots, y_r)$. $\square$

b. Notons $\{x_0, \ldots, x_r\}$ l'ensemble des réels $u_1, u_2 \ldots, u_n$ (donc $r + 1 \leqslant n$) et L le polynôme interpolateur de degré au plus r tel que $L(x_i) = \sqrt{x_i}$. Alors $L(U) = V$. $\square$

11. Racines carrées dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

a. Comme A est symétrique elle est orthodiagonalisable et, comme elle est en outre définie positive, ses valeurs propres sont strictement postives. Ainsi il existe P orthogonale et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ telles que $S = PDP^{-1}$.
Soit alors $A = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$.
Il vient $S = A^2$ et en outre A est bien symétrique (car P est orthogonale donc $A = P\Delta{}^tP$) et définie positive (puisque semblable à Δ donc à valeurs propres strictement postives : les λ_i). $\square$

b. D'après la question 10.b., il existe un polynôme L tel que $L(D) = \Delta$ donc classiquement $L(PDP^{-1}) = P\Delta P^{-1}$ soit $L(S) = A$ donc $L(B^2) = A$ qoit $Q(B) = A$ avec Q le polynôme LoX^2. $\square$

Ainsi $AB = Q(B)X(B) = (QX)(B) = (XQ)(B) = X(B)Q(B) = BA$ par le classique morphisme de l'algèbre $\mathbb{R}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $P \longmapsto P(B)$. $\square$

c. Soient M et N deux matrices symétriques définies positives.
Alors $M+N$ est symétrique et, pour X non nul, ${}^tX(M+N)X = {}^tXMX + {}^tXNX > 0$.
Ainsi $M+N$ est symétrique définie positive donc inversible. $\square$
On a en fait prouvé le résultat un peu plus général : la somme de deux matrices symétriques positives dont l'une est en outre définie est définie positive. $\square$

d. Il vient $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$ puisque A et B commutent.
Or $A^2 = B^2 (= S)$ donc $(A+B)(A-B) = 0$. Comme $A+B$ est inversible, il en découle que $A = B$. $\square$

12. Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne.

a. Soit M orthogonale. Il vient (car $\sqrt{S}$ et $(\sqrt{S})^{-1}$ sont symétriques):
$P \underset{\text{DEF}}{=} {}^t\Big((\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S}\Big)S\Big((\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S}\Big) = \sqrt{S}\,{}^tM(\sqrt{S})^{-1}S(\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S}$.
Or $(\sqrt{S})^{-1}S(\sqrt{S})^{-1} = (\sqrt{S})^{-1}\sqrt{S}\sqrt{S}(\sqrt{S})^{-1} = \mathrm{Id}$ donc $P = \sqrt{S}\,{}^tMM\sqrt{S} = \sqrt{S}\sqrt{S} = S$ puique $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Donc $(\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S} \in \mathrm{ISOM}(N_S)$ d'après la question 8.b.. $\square$

b. ψ est un morphisme de groupes car $\psi(MN) = \psi(M)\psi(N)$.
ψ est injectif car si $M \in \operatorname{Ker}\psi$ alors $(\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S} = \mathrm{Id}$ donc $M = \mathrm{Id}$.
ψ est surjectif car si $N \in \mathrm{ISOM}(N_S)$ alors $N = \psi(M)$ avec $M = \sqrt{S}N(\sqrt{S})^{-1}$ et M est bien orthogonale. En effet d'après la question 8.b. on a ${}^tNSN = S$ donc ${}^tN\sqrt{S}\sqrt{S}N = S$ donc $(\sqrt{S})^{-1}\,{}^tN\sqrt{S}\sqrt{S}N(\sqrt{S})^{-1} = \mathrm{Id}$ donc ${}^tMM = \mathrm{Id}$.
Ainsi ψ est un isomorphisme de groupes de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{ISOM}(N_S)$.
En particulier $\mathrm{ISOM}(N_S)$ est infini puisque $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'est. $\square$

Remarque : ce dernier résultat est évident directement car par le choix d'une base orthonormale on établit un isomorphisme entre tout espace euclidien et $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique ce qui prouve que les deux groupes orthogonaux sont isomorphes.

IV. Étude du cardinal de $\mathrm{Isom}(p)$.

13. Endomorphismes de permutation signée.

a. Notons $\alpha = \sigma^{-1}$. Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $y = u_{\sigma,\varepsilon}(x)$. Il vient :
$y = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i e_{\sigma(i)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_{\alpha(j)}x_{\alpha(j)}e_j$ donc $\|y\|_p^p = \sum\limits_{j=1}^{n} |\varepsilon_{\alpha(j)}x_{\alpha(j)}|^p = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_{\alpha(j)}|^p = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|x\|_p^p$. $\square$

b. $\mathcal{M}\Big(u_{\sigma,\varepsilon}\,;(e_1,e_2,e_3,e_4)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Inégalité de Holdër.

a. Si a ou b est nul, l'inégalité est claire. Sinon, en posant $\alpha = a^p$ et $\beta = b^q$, l'inégalité proposée se ramène à établir (par croissance de la fonction exponentielle) que $\dfrac{1}{p}\ln\alpha + \dfrac{1}{q}\ln\beta \leqslant \ln\Big(\dfrac{1}{p}\alpha + \dfrac{1}{q}\beta\Big)$. Or cette inégalité découle de la concavité de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$. $\square$

b. Commençons par remarquer que l'inégalité est évidente si l'un des deux vecteurs est nul. Sinon :
Lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$, il vient (d'après la question précédente) :
$| < x,y > | \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\dfrac{1}{p}|x_i|^p + \dfrac{1}{q}|y_i|^q\big) = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p + \dfrac{1}{q}\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 = \|x\|_p.\|y\|_q$
Dans le cas général, en notant $x' = \dfrac{1}{\|x\|_p}x$ et $y' = \dfrac{1}{\|y\|_q}y$, on a d'après le cas précédent $\dfrac{1}{\|x\|_p\|y\|_q}| < x,y > | \leqslant 1$ ce qui établit le résultat. $\square$

c. Pour $p = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

15. On a $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$ et comme u est une p-isométrie, il vient $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = \|u(e_j)\|_p^p = \|e_j\|_p^p = 1$ $\square$
Donc $\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p\Big) = n$. $\square$

16. Une formule clé de dualité.

a. Soit x fixé dans E. Alors $\varphi_x : y \longmapsto < x, y >$ est une forme linéaire sur E de dimension finie donc est continue.
Par ailleurs Σ_q est un fermé borné de E muni de la norme p (qui définit bien la topologie nusuelle de E puisque toutes les normes sont équivalentes sur E de dimension finie). Donc Σ_q est un compact de E.
Il en découle que φ_x est bornée sur Σ_q et atteint sa borne supérieure notée Q_x dans la suite. $\square$

b. Pour tout $y \in \Sigma_q$ on a, en vertu de l'inégalité de Holdër, $| < x, y > | \leqslant \|x\|_p$ donc $Q_x \leqslant \|x\|_p$.
Notons que si $x = 0$ naturellement $Q_x = 0 = \|x\|_p$.
Si $x \neq 0$ alors en notant y défini dans l'énoncé il vient :
1/ $\|x\|_p^{p-1} \times x_i y_i = \varepsilon_i x_i |x_i|^{p-1} = |x_i|.|x_i|^{p-1} = |x_i|^p$ si $x_i \neq 0$ et cette égalité est encore vraie si $x_i = 0$.
Donc $\|x\|_p^{p-1} \times | < x, y > | = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|x\|_p^p$ soit encore $| < x, y > | = \|x\|_p$.
2/ $\|y\|_q^q = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q = \sum\limits_{i \in I} |y_i|^q = \|x\|_p^{(1-p)q} \sum\limits_{i \in I} |x_i|^{(p-1)q}$
en désignant par I l'ensemble non vide des indices i tels que $x_i \neq 0$.
Or $(p-1)q = p$ donc $\|y\|_q^q = \|x\|_p^{-p} \sum\limits_{i \in I} |x_i|^p = \|x\|_p^{-p} \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|x\|_p^{-p} \|x\|_p^p = 1$ donc $y \in \Sigma_q$.
Il résulte alors de 1/ et 2/ que $Q_x \geqslant \|x\|_p$.

En conclusion finale $Q_x = \|x\|_p$ pour tout $x \in E$. $\square$

17. Soit u une p-isométrie et soit x un vecteur quelconque de E.
Il vient d'après la question précédente en échangeant les rôles de p et q :
$\|u^*(x)\|_q = \max\limits_{y \in \Sigma_p} | < u^*(x), y > | = \max\limits_{y \in \Sigma_p} | < x, u(y) > |$
Or comme u est une p-isométrie, on a $u(\Sigma_p) = \Sigma_p$ donc, lorsque y parcourt Σ_p, $u(y)$ parcourt également Σ_p. Ainsi $\|u^*(x)\|_q = \max\limits_{z \in \Sigma_p} | < x, z > | = \|x\|_q$. Donc u^* est bien une q-isométrie. $\square$

La matrice de u^* dans la base canonique (orthonormée pour le produit scalaire canonique $< . >$) est ${}^tA$. La question 15 prouve alors que $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{j,i}|^q \right) = n$. $\square$

18. On suppose dans toute la suite du problème $p \neq 2$ donc $p \neq q$ et par exemple $p > q$ (symétrie des rôles de p et q).

a. Pour tout i on a $\alpha_i^p \leqslant \alpha_i^q$ (car $\alpha_i \in [0, 1]$ et $p > q$).
Par ailleurs s'il existait i_0 tel que $\alpha_{i_0} \in]0, 1[$ on aurait $\alpha_{i_0}^p < \alpha_{i_0}^q$ donc on aurait $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i^p < \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i^q$ ce qui est exclu.
Donc α_k ne peut prendre que 2 valeurs : 0 et 1. $\square$

b. Nous avons d'après les questions 15 et 17 : $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{j,i}|^q \right)$ soit $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^p = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^q$
donc les seules valeurs possibles des $|a_{i,j}|$ sont 0 et 1. $\square$

19. D'après la question 15 on a pour tout j : $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = 1$ et de même en considérant u^* : $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^q = 1$ pour tout i.
Comme les seules valeurs possibles des $|a_{i,j}|$ sont 0 et 1, il en résulte que dans chaque colonne tous les termes $a_{i,j}$ sont nuls sauf l'un égal à ± 1. De même pour chaque ligne. Ce qui prouve que les colonnes forment une base $\big(\varepsilon_1 e_{\sigma(1)}, \varepsilon_2 e_{\sigma(2)}, \ldots, \varepsilon_n e_{\sigma(n)}\big)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\sigma \in \mathcal{P}_n$.
Ainsi toute p-isométrie u est du type $u_{\sigma,\varepsilon}$. Réciproquement toute application de ce type est une p-isométrie d'après la question 13.
Le groupe des p-isométrie pour $p \neq 2$ est donc le groupe des permutations signées de $\mathbb{R}^n$.
Comme l'application $(\sigma, \varepsilon) \longmapsto u_{\sigma,\varepsilon}$ est injective, son cardinal est $2^n n!$. $\square$

FIN