

Concours Centrale Supélec

Math 1 MP 2009

Partie I : Questions préliminaires

I.1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Comme Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

I.2) Pour $x > 0$, $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x-1} dt$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle, donc $\Gamma''(x) > 0$. Donc Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que Γ' est strictement positive sur $]c, +\infty[$ et Γ strictement croissante sur cet intervalle ; *a fortiori* sur $[2, +\infty[$.

I.3) Comme $(\Gamma(n))_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ et que Γ est croissante au voisinage de $+\infty$, Γ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On peut donc limiter l'étude à $\gamma > 1$.

Pour $x \geq 2$, on note n sa partie entière.

On a alors : $0 \leq \frac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \leq \frac{\gamma^{n+1}}{\Gamma(n)} = \gamma^2 \frac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}$. Comme la partie entière tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et que la suite $\left(\frac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0, $\frac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, i.e. $\gamma^x = o(\Gamma(x))$ au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A.1) On suppose que ϕ n'est pas positive sur $[t_0, +\infty[$. Soit alors $t_1 \geq t_0$ tel que $\phi(t_1) < 0$; par décroissance de ϕ , sur $[t_1, +\infty[$, $\phi(t) \leq \phi(t_1) \leq 0$. Or la fonction constante $\phi(t_1)$ n'est pas intégrable sur l'intervalle non borné $[t_1, +\infty[$; donc ϕ n'est pas intégrable sur cet intervalle. Absurde.

Donc ϕ est positive sur $[t_0, +\infty[$.

REMARQUE : ϕ étant décroissante sur $[t_0, +\infty[$, elle admet une limite en $+\infty$; comme ϕ est intégrable, cette limite est nulle; par décroissance, ϕ est positive sur $[t_0, +\infty[$.

II.A.2.a) Pour $n \geq (t_0/h) + 1 : \forall t \in [(n-1)h, nh] \subset [t_0, +\infty[$, $\phi(t) \geq \phi(nh)$.

Donc $\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt \geq \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(nh) dt = h\phi(nh) \geq 0$.

II.A.2.b) Comme ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$, la série $\sum \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt$ converge; on déduit de (II.A.2.a) la convergence de la série $\sum h\phi(nh)$.

II.A.3) Pour $n \geq (t_0/h) + 1$, pour la même raison qu'au (II.A.2.a) : $h\phi(nh) \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt \leq h\phi((n-1)h)$.

On note n_0 la partie entière de $(t_0/h) + 2$.

On a alors : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi(nh) \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt = \int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi((n-1)h) = \sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh)$, donc $0 \leq \sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t) dt \leq h\phi((n_0-1)h)$.

De plus, $\left| \int_0^{(n_0-1)h} \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh) \right| = \left| \sum_{n=0}^{n_0-2} \int_{nh}^{(n+1)h} (\phi(t) - \phi(nh)) dt \right| \leq \sum_{n=0}^{n_0-2} \int_{nh}^{(n+1)h} |\phi(t) - \phi(nh)| dt$

Comme $\forall t \in [nh, (n+1)h]$, $|t - nh| \leq h$:

$$\left| \int_0^{(n_0-1)h} \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh) \right| \leq (n_0-1)h \cdot \sup \{ |\phi(t) - \phi(u)|, t, u \in [0, (n_0-1)h], |t - u| \leq h \}$$

Or $(n_0-1)h \leq t_0 + h$. On se limite à $h \in]0, 1]$; ainsi $(n_0-1)h \leq t_0 + 1$. Comme ϕ est continue sur le segment $[0, t_0 + 1]$, elle y est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver $h_0 \in]0, 1]$ tel que $\forall t, u \in [0, t_0 + 1], |t - u| \leq h_0 \implies |\phi(t) - \phi(u)| \leq \varepsilon$.

Alors, pour $h \in]0, h_0]$, on a : $\left| \int_0^{(n_0-1)h} \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh) \right| \leq (t_0 + 1)\varepsilon$.

Comme $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \left(\int_0^{(n_0-1)h} \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh) \right) + \left(\int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t) dt - \sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh) \right)$, on en déduit :

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \right| \leq (t_0 + 1)\varepsilon + h\phi((n_0 - 1)h).$$

Comme ϕ est continue sur le segment $[0, t_0 + 1]$, elle y est bornée.

Or $(n_0 - 1)h \in [0, t_0 + 1]$; donc $h\phi((n_0 - 1)h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$.

On peut donc trouver $h_1 > 0$ tel que $\forall h \in]0, h_1]$, $|h\phi((n_0 - 1)h)| \leq \varepsilon$.

Finalement, pour tout $h \in]0, \min(h_0, h_1)]$, on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \right| \leq ((t_0 + 2)\varepsilon).$$

Comme t_0 est une donnée, on peut conclure : $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \xrightarrow{h \rightarrow 0, h > 0} 0$.

II.B.1) Pour $\alpha < 1$, la fonction g_α ne peut être prolongée en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Pour la suite, on suppose $\alpha \geq 1$. Alors g_α est continue sur $[0, +\infty[$ (après prolongement naturel en 0) et intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'intégrale $\Gamma(\alpha)$). Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'_\alpha(t) = e^{-t}t^{\alpha-2}(-t + \alpha - 1)$. Donc g'_α est négative sur $[\alpha - 1, +\infty[$ et g_α est décroissante sur cet intervalle. Les hypothèses du (II.A) sont donc satisfaites par g_α , $\alpha \geq 1$.

Pour $x \in]0, 1[$, $h = -\ln x > 0$ et $h \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(nh) = (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x)$; comme $h \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} 0$ avec $h > 0$,

d'après (II.A), $(-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} \int_0^{+\infty} g_\alpha = \Gamma(\alpha)$.

II.B.2.a) On étudie la convergence absolue de la série $\sum n^{\alpha-1}x^n$ pour $x \neq 0$:

$\frac{|(n+1)^{\alpha-1}x^{n+1}|}{|n^{\alpha-1}x^n|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$; d'après la règle de d'Alembert, comme $|n^{\alpha-1}x^n| > 0$ pour tout $n \geq 1$, si $|x| < 1$, la série $\sum |n^{\alpha-1}x^n|$ converge, si $|x| > 1$, elle diverge.

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{\alpha-1}x^n$ vaut 1.

II.B.2.b) Pour $x \in]0, 1[$, $g_\alpha(-n \ln x) = (-\ln x)^{\alpha-1}n^{\alpha-1}x^n = (-\ln x)^{\alpha-1}S_\alpha(x)$.

Pour $\alpha \geq 1$:

$-\ln x g_\alpha(-n \ln x) = (-\ln x)^\alpha S_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} \Gamma(\alpha) \neq 0$; donc $S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(-\ln x)^\alpha}$ au voisinage de 1^- . Comme

$\ln x \sim x - 1$ au voisinage de 1 : $S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$ au voisinage de 1^- .

Partie III : La première fonction eulérienne

III.A) La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0, 1[$. Équivalente en 0^+ à $t^{\alpha-1}$, elle est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et seulement si $\alpha - 1 > -1$, i.e. $\alpha > 0$. Équivalente en 1^- à $(1-t)^{\beta-1}$, elle est intégrable sur $[1/2, 1[$ si et seulement si $\beta - 1 > -1$, i.e. $\beta > 0$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si α et β sont strictement positifs.

III.A.2.i) Égalité obtenue avec le changement de variable affine $t \mapsto u = 1 - t$, qui est un difféomorphisme de $]0, 1[$ sur lui-même.

III.A.2.ii) $u = \frac{t}{1-t} \iff t = \frac{u}{u+1}$; $u \mapsto t = \frac{u}{u+1}$ est un difféomorphisme de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$; $\frac{dt}{du} = \frac{1}{(1+u)^2}$;

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha+\beta-2} = u^{\alpha-1} \frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}.$$

$$\text{Donc } B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} \frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}} \frac{1}{(1+u)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}} du.$$

III.A.2.iii) Soit $\varepsilon \in]0, 1/2]$; par parties, $\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1} dt = \left[t^{\alpha} \frac{-(1-t)^{\beta}}{\beta} \right]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \frac{\alpha}{\beta} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta} dt$.

Comme α et β sont strictement positifs, $t^{\alpha} \frac{-(1-t)^{\beta}}{\beta}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ou 1 ;

$$\text{donc } \left[t^{\alpha} \frac{-(1-t)^{\beta}}{\beta} \right]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta} = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1-t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} - t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}$;

$$\text{donc } \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} B(\alpha, \beta) - B(\alpha+1, \beta).$$

On en déduit : $B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}(B(\alpha, \beta) - B(\alpha+1, \beta))$; puis : $B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha, \beta)$.

III.B.1) On suppose que $\forall \alpha, \beta > 2$, $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Soit $\alpha, \beta > 0$;

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\alpha+2, \beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\beta, \alpha+2) \\ &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1} \frac{\alpha+\beta+2}{\beta}B(\beta+1, \alpha+2) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1} \frac{\alpha+\beta+2}{\beta} \frac{\alpha+\beta+3}{\beta+1}B(\beta+2, \alpha+2). \end{aligned}$$

Comme $\alpha+2$ et $\beta+2$ sont strictement supérieurs à 2 :

$$B(\beta+2, \alpha+2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)} = \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)(\beta+1)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Après substitution et simplification : $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

III.B.2.a) Comme $\alpha-1$ et $\beta-1$ sont strictement plus grands que 1, $\psi_{\alpha, \beta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$, donc sa dérivée est bornée. Donc $\psi_{\alpha, \beta}$ est lipschitzienne.

III.B.2.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $B(\alpha, \beta) - u_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\psi_{\alpha, \beta}(t) - \psi_{\alpha, \beta}\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt$.

Comme, sur $[k/n, (k+1)/n]$, $\left| \psi_{\alpha, \beta}(t) - \psi_{\alpha, \beta}\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq A_{\alpha, \beta} \left| t - \frac{k}{n} \right| = A_{\alpha, \beta} \left(t - \frac{k}{n} \right)$, on a :

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\psi_{\alpha, \beta}(t) - \psi_{\alpha, \beta}\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right| \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} A_{\alpha, \beta} \left(t - \frac{k}{n} \right) dt = A_{\alpha, \beta} \cdot \frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit : $|B(\alpha, \beta) - u_n(\alpha, \beta)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\psi_{\alpha, \beta}(t) - \psi_{\alpha, \beta}\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right| \leq n \cdot \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n^2} = \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n}$.

III.B.2.c) Pour $x \in [0, 1]$, les séries $\sum n^{\alpha-1}x^n$ et $\sum n^{\beta-1}x^n$ convergent absolument (séries entières de rayon de convergence 1), donc la série produit converge absolument et sa somme est le produit des sommes, soit $S_{\alpha}(x)S_{\beta}(x)$. Le terme

d'ordre n de la série produit vaut : $\sum_{k=0}^n k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}x^n = n^{\alpha+\beta-2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1} x^n = n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha, \beta)x^n$.

On en déduit que : $S_{\alpha}(x)S_{\beta}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha, \beta)x^n$.

Par différence : $S_{\alpha}(x)S_{\beta}(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1} (u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)) x^n$.

Avec la majoration du (2.b), on obtient :

$$|S_{\alpha}(x)S_{\beta}(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1} |u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| x^n \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-2} x^n = \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

En multipliant par $(1-x)^{\alpha+\beta}$:

$$|(1-x)^{\alpha}S_{\alpha}(x).(1-x)^{\beta}S_{\beta}(x) - B(\alpha, \beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

Comme $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ et $\alpha+\beta-1$ sont tous supérieurs à 1, on peut utiliser la question (II.B.2) :

$$(1-x)^{\alpha}S_{\alpha}(x).(1-x)^{\beta}S_{\beta}(x) - B(\alpha, \beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

et $\frac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} 0$;
 donc $|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta)| \leq 0$, i.e. $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha, \beta) = 0$.

III.C.1) Pour $\alpha \in]0, 1[$, $1 - \alpha \in]0, 1[$, donc $B(\alpha, 1 - \alpha)$ existe bien.

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^1 f(\alpha, t) dt \text{ avec } f : (\alpha, t) \mapsto t^\alpha(1 - t)^{-\alpha}.$$

- Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $t \mapsto f(\alpha, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$.
- Pour tout $t \in]0, 1[$, $\alpha \mapsto f(\alpha, t)$ est continue sur $]0, 1[$.
- Domination de f sur le segment $[a, b] \subset]0, 1[$: comme une exponentielle de base inférieure à 1 est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\forall t \in]0, 1[$, $\forall \alpha \in [a, b]$, $0 \leq f(\alpha, t) \leq t^{a-1}(1 - t)^{-b}$ et $t \mapsto t^{a-1}(1 - t)^{-b}$ est indépendante de α et intégrable sur $]0, 1[$ (comme au (III.A.1)).

D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, $\alpha \mapsto B(\alpha, 1 - \alpha)$ est continue sur $]0, 1[$.

III.C.2.a) D'abord, $(2p + 1)/(2q) \in]0, 1[$.

$$\text{D'après le (III.A.2.ii), } B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{(2(p-q)+1)/2q}}{1+t} dt.$$

Le changement de variable $u \mapsto t = u^{2q}$, difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même, permet d'obtenir :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2(p-q)+1}}{1+u^{2q}} \cdot 2qu^{2q-1} du = 2q \int_0^{+\infty} \frac{u^{2p}}{1+u^{2q}} du.$$

III.C.2.b) Les z_k , k compris entre 0 et $q - 1$ et leurs opposés sont les $2q$ zéros de $X^{2q} + 1$ (et ils sont simples).

Comme $A = X^{2p}$ a un degré strictement inférieur à $B = X^{2q} + 1$, la partie entière de $\frac{X^{2p}}{1 + X^{2q}}$ est nulle. Le développement en éléments simples de $\frac{X^{2p}}{1 + X^{2q}}$ s'écrit donc : $\frac{X^{2p}}{1 + X^{2q}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a_k}{X - z_k} + \frac{b_k}{X + z_k} \right)$, où les a_k et les b_k sont des nombres complexes définis par : $a_k = \frac{A(z_k)}{B'(z_k)}$ et $b_k = \frac{A(-z_k)}{B'(-z_k)}$.

Or $B' = 2qX^{2q-1}$ et $z_k^{2q} = -1$; donc $B'(z_k) = -\frac{2q}{z_k}$ et $B'(-z_k) = \frac{2q}{z_k}$; d'où la formule de l'énoncé.

III.C.2.c) Vérification par simple dérivation ...

Pour tout k compris entre 0 et $q - 1$, la fonction :

$$\begin{aligned} \omega_k : t \mapsto & \left(\frac{1}{2} \ln((t - \Re z_k)^2 + (\Im z_k)^2) + i \arctan\left(\frac{t - \Re z_k}{\Im z_k}\right) \right) \\ & - \left(\frac{1}{2} \ln((t + \Re z_k)^2 + (-\Im z_k)^2) + i \arctan\left(\frac{t + \Re z_k}{-\Im z_k}\right) \right) \\ = & \frac{1}{2} \ln \frac{(t - \Re z_k)^2 + (\Im z_k)^2}{(t + \Re z_k)^2 + (\Im z_k)^2} + i \left(\arctan\left(\frac{t - \Re z_k}{\Im z_k}\right) + \arctan\left(\frac{t + \Re z_k}{\Im z_k}\right) \right) \end{aligned}$$

est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t - z_k} - \frac{1}{t + z_k}$.

Comme $\Im z_k = \sin \pi \frac{2k+1}{2q} > 0$, $\omega_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \pi i$; et $\omega_k(0) = 0$.

La fonction $\omega = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \omega_k$ est une primitive de $t \mapsto \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}}$.

De plus, $\omega(0) = 0$ et $\omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \pi i = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

On en déduit que : $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} dt = \lim_{+\infty} \omega - \omega(0) = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

Or $z_k^{2p+1} = e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} \cdot \left(e^{i\pi \frac{2p+1}{q}} \right)^k$ et $e^{i\pi \frac{2p+1}{q}} \neq 1$;

donc $\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} \cdot \frac{e^{i\pi \frac{2p+1}{q}} q - 1}{e^{i\pi \frac{2p+1}{q}} - 1} = e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} \cdot \frac{e^{i\pi(2p+1)} - 1}{e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} (e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} - e^{-i\pi \frac{2p+1}{2q}})} = \frac{-2}{2i \sin \pi \frac{2p+1}{2q}}$.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} dt = \frac{\pi}{2q} \frac{1}{\sin \pi \frac{2p+1}{2q}}$.

III.C.3) Pour tout α de la forme $\alpha = \frac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, on a ainsi :

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} dt = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

Comme $\alpha \mapsto B(\alpha, 1 - \alpha)$ et $\alpha \mapsto \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$ sont continues sur $]0, 1[$ et que l'ensemble des $\frac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, est dense dans $]0, 1[$, on peut affirmer : $\forall \alpha \in]0, 1[, B(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$.

De plus, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = B(\alpha, 1 - \alpha)\Gamma(\alpha + (1 - \alpha)) = B(\alpha, 1 - \alpha)$.

Partie IV : L'opérateur d'Abel

IV.A.1) La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $[0, x[$ et, pour tout $t \in [0, x[$, on a $\left| \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \right| \leq \frac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$; comme $t \mapsto \frac{1}{(x-t)^\alpha}$ est sur $[0, x[$ (de référence, avec $\alpha < 1$), $t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0, x[$, donc sur $]0, x[$.

IV.A.2.a) Pour $x \in]0, 1]$, changement de variable affine $u \mapsto t = ux \dots$ La formule reste valable pour $x = 0$ ($1 - \alpha > 0$).

IV.A.2.b) Comme $x \mapsto x^{1-\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$, il suffit de montrer la continuité de la fonction $x \mapsto \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt$.

- Pour tout $x \in [0, 1]$, $t \mapsto \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue (par morceaux) sur $[0, 1[$;
- pour tout $t \in [0, 1[$, $x \mapsto \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$;
- domination sur $[0, 1]$: pour tout $t \in [0, 1[$ et tout $x \in [0, 1]$, on a : $\left| \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} \right| \leq \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$; la fonction $t \mapsto \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ est continue, intégrable sur $[0, 1[$ et indépendante de x .

Donc $x \mapsto \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt$ est continue sur $[0, 1]$; donc $A_\alpha f$ est continue sur $[0, 1]$.

IV.A.2.c) Par linéarité de l'intégrale, A_α est linéaire. D'après (IV.A.2.b), A_α est un endomorphisme de E .

Continuité :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], |A_\alpha f(x)| \leq x^{\alpha-1} \cdot \int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha} dt \leq 1 \cdot \int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha} dt = \|f\| \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \|f\|.$$

Donc, $\forall f \in E, \|A_\alpha f\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \|f\|$. On en déduit que l'endomorphisme A_α est continu et que $\|A_\alpha\| \leq \frac{1}{1-\alpha}$.

De plus, si f est la fonction constante 1, $\|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha} \|f\|$. Donc $\|A_\alpha\| = \frac{1}{1-\alpha}$.

IV.B.1.a) Pour $n = 1$, on reprend la méthode de majoration du (IV.A.2.c) :

$$\text{pour tout } x \in [0, 1], |A_\alpha(x)| \leq x^\beta \|f\| \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = x^\beta \|f\| \frac{1}{\beta} = x^\beta \|f\| \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Soit $n \geq 1$; on suppose : $\forall x \in [0, 1], |A_\alpha^n f(x)| \leq x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

$$\text{Soit } x \in [0, 1]; |A_\alpha^{n+1} f(x)| = x^\beta \left| \int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt \right| \leq x^\beta \int_0^1 \frac{|A_\alpha^n f(xt)|}{(1-t)^\alpha} dt \leq x^\beta x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| \int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha} dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} |A_\alpha^{n+1} f(x)| &\leq x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta+1, 1-\alpha) \|f\| = x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta+1, \beta) \|f\| \\ &= x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \frac{\Gamma(n\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \|f\| = x^{(n+1)\beta} \frac{\Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \|f\|. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |A_\alpha^n f(x)| \leq x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

IV.B.1.b) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|A_\alpha^n f\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$. Autrement dit, l'endomorphisme A_α^n de E est continu et

$$\|A_\alpha^n\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

IV.B.2) Soit $\gamma > 0$; alors $\gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{(\gamma\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{1}{(\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)}} \frac{((\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)})^{n\beta+1}}{\Gamma(1+n\beta)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'après (I.3).

IV.B.3.a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\lambda^n A_\alpha^n f\| \leq |\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

Or $|\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (2|\lambda|)^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$; donc la série $\sum |\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$ converge et la série $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$.

IV.B.3.b) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $(\text{Id}_E - \lambda A_\alpha) \sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f = f - \lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f$.

Or $\left(\sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers g ; $\left(\sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ est une suite d'éléments de E (i.e. de fonctions continues), donc g est continue ($g \in E$) et $\left(\sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge vers g dans E . Comme $\text{Id}_E - \lambda A_\alpha$ est continu dans E , $\left((\text{Id}_E - \lambda A_\alpha) \sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge dans E , i.e. uniformément sur $[0, 1]$ vers $(\text{Id}_E - \lambda A_\alpha)g$.

D'autre part, $(\lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f)_N$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$, i.e. converge vers 0 dans E .

Donc $(\text{Id}_E - \lambda A_\alpha)g = f$.

IV.B.3.c) D'après la question précédente, $(\text{Id}_E - \lambda A_\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n = \text{Id}_E$.

On montre de même : $\forall f \in E$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right) (\text{Id}_E - \lambda A_\alpha)f = f$, i.e. $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right) (\text{Id}_E - \lambda A_\alpha) = \text{Id}_E$.

Donc $\text{Id}_E - \lambda A_\alpha$ est inversible dans E , d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$.

IV.C.1.a) $A_\alpha e_n(x) = x^\beta \int_0^1 \frac{(xt)^n}{(1-t)^\alpha} dt = x^{\beta+n} B(n+1, \beta) = x^{\beta+n} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}$; donc $A_\alpha e_n = B(n+1, \beta) e_{n+\beta} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} e_{n+\beta}$ en prolongeant la définition des e_k à $k \in [0, +\infty[$. Le résultat précédent reste vrai pour tout $n \in [0, +\infty[$.

IV.C.1.b)

$$\begin{aligned} (A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} A_{1-\alpha}(e_{n+\beta}) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} \cdot \frac{\Gamma((n+\beta)+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma((n+\beta)+1+(1-\beta))} e_{(n+\beta)+1-\beta} \\ &= \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} e_{n+1} = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{n+1} e_{n+1} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

IV.C.2) Vrai par linéarité ...

IV.C.3.a) Pour tout $f \in E$, Pf est bien continu; de plus, P est linéaire.

Soit $f \in E$; alors $\forall x \in [0, 1]$, $|Pf(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \|f\| dt = \|f\| x \leq \|f\|$; donc $\|Pf\| \leq \|f\|$.

Donc P est linéaire continu et $\|P\| \leq 1$.

De plus, si f est l'application constante 1, alors $Pf : x \mapsto x$; donc $\|Pf\| = \|f\|$. Donc $\|P\| = 1$.

IV.C.3.b) L'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions polynômiales sur $[0, 1]$ est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|$ (théorème de Weierstrass). Comme B_α et $\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} P$ sont deux applications continues sur E coïncidant sur $\mathcal{P}$, elles sont égales.

IV.C.3.c) Comme P est à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$, $D \circ B_\alpha$ est bien défini. Comme $D \circ P = \text{Id}_E$, on a la formule de l'énoncé.

IV.C.3.d) Soit $f \in E$ tel que $A_\alpha f = 0$; alors $B_\alpha f = 0$, donc $P \circ B_\alpha f = 0$; avec la relation du (IV.C.3.c), $f = 0$.

Donc l'opérateur (linéaire) A_α est injectif.