

Problème 1

Ce problème a pour objet une approche du paradoxe de Bertrand.

Notations

Dans le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ direct.

\mathcal{C} désigne le cercle de centre O et de rayon R , R étant un réel strictement positif donné.

Partie I

Etude des propriétés des triangles équilatéraux inscrits dans le cercle \mathcal{C}

1. Soit A un point donné du cercle \mathcal{C} .

Construire à la règle et au compas un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle \mathcal{C} .

Préciser les étapes successives de la construction.

Dans toute la suite du problème, A, B, C désignent trois points du cercle \mathcal{C} tels que le triangle ABC soit équilatéral.

On note A' le milieu du segment $[BC]$ et A'' le point diamétralement opposé au point A sur le cercle \mathcal{C} .

2. On se propose de déterminer la longueur L des côtés du triangle ABC .

2.1. Déterminer le quotient de longueurs $\frac{AO}{AA'}$.

2.2. En déduire la longueur AA' en fonction de R .

2.3. Démontrer que $L = R\sqrt{3}$.

3. Soit U un point du cercle \mathcal{C} distinct de A . On choisit V et W deux points du cercle \mathcal{C} tels que le triangle UVW soit un triangle équilatéral inscrit dans le cercle \mathcal{C} .

3.1. Démontrer que les triangles ABC et UVW sont isométriques.

3.2. Préciser une isométrie du plan transformant le triangle ABC en le triangle UVW en distinguant les cas de triangles directement ou non directement isométriques.

4. Justifier les quatre caractérisations de la droite (AA') comme droite remarquable du triangle ABC .

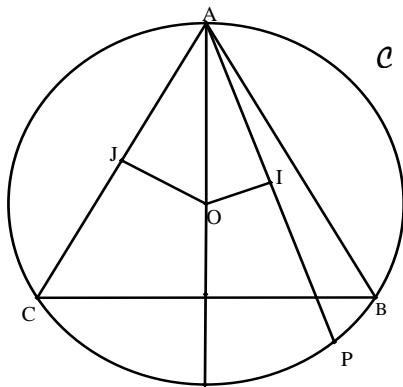
5. Déterminer la longueur de chacun des arcs du cercle \mathcal{C} de part et d'autre de la droite (AB) .

Partie II

Quelques comparaisons de longueurs de segments

Dans cette partie, les points A, B et C sont fixés sur le cercle \mathcal{C} .

1. Soit P un point du cercle \mathcal{C} . On note I le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP) et J le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) .

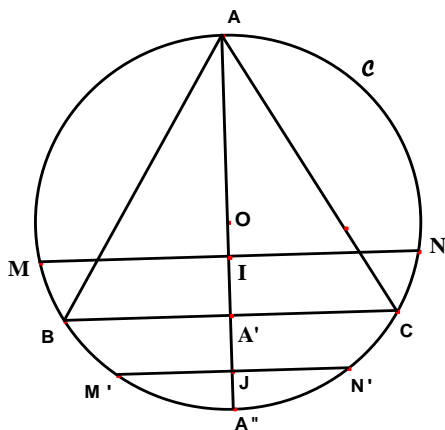


1.1. Démontrer que si le point P appartient à l'arc \widehat{BC} du cercle \mathcal{C} ne contenant pas le point A , alors $IA \geq JA$.

1.2. En déduire que, si le point P appartient à l'arc \widehat{BC} du cercle \mathcal{C} ne contenant pas le point A , alors $AP \geq L$.

1.3. Montrer que si le point P appartient à l'arc \widehat{BC} du cercle \mathcal{C} contenant le point A , alors $AP \leq L$.

2. Soient M et N deux points distincts du cercle \mathcal{C} tels que la droite (MN) soit perpendiculaire à la droite (AA') au point I du segment $[OA']$.



à la droite (AA') au point I du segment $[OA']$.

Soient M' et N' deux points distincts du cercle \mathcal{C} tels que la droite $(M'N')$ soit perpendiculaire à la droite (AA') au point J du segment $[A'A'']$.

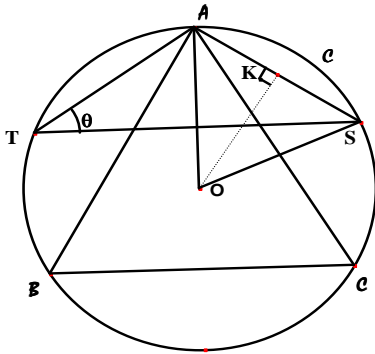
Démontrer que : $M'N' \leq BC \leq MN$.

3. Soient S et T deux points distincts du cercle \mathcal{C} , tous deux distincts du point A .

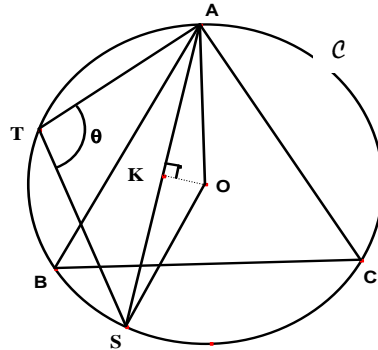
On note θ la mesure en radians de l'angle géométrique \widehat{ATS} ; on a donc : $0 < \theta < \pi$.

On note K le milieu du segment $[AS]$.

Cas où $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$



Cas où $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$



3.1. Calculer les longueurs AK et AS en fonction de R et θ en distinguant les trois cas

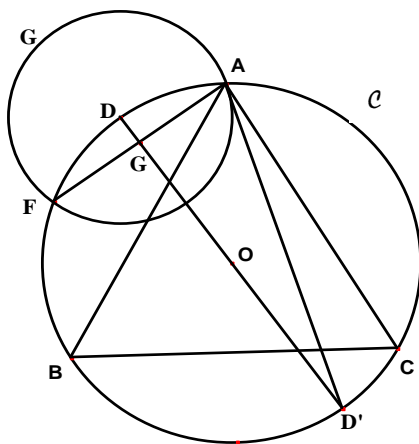
suivants : $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta > \frac{\pi}{2}$.

3.2. Démontrer que si $\theta < \frac{\pi}{3}$ alors $AS < L$.

3.3. Comparer les longueurs AS et L lorsque $\theta > \frac{2\pi}{3}$.

4. Soit D un point du cercle \mathcal{C} distinct des points A et A''.

On note ρ le nombre réel égal à la longueur AD. On appelle Γ le cercle de centre D et de rayon ρ .



4.1. Démontrer que le cercle Γ coupe le cercle \mathcal{C} en deux points distincts, le point A et un autre point noté F.

4.2. Démontrer que la droite (OD) est la médiatrice du segment [AF].

On note G le milieu du segment [AF].

4.3. Soit D' le point de \mathcal{C} diamétralement opposé à D.

Calculer l'aire du triangle ADD' en fonction de R et de ρ .

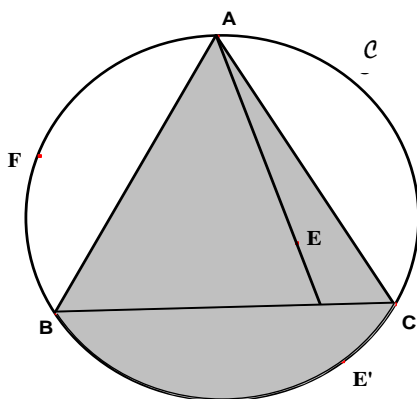
4.4. En déduire la longueur AF en fonction de R et de ρ .

4.5. Résoudre l'inéquation suivante :

$$x\sqrt{4R^2 - x^2} \geq R^2\sqrt{3} \text{ pour } x \text{ nombre réel de l'intervalle }]0, 2R[.$$

4.6. Démontrer que l'ensemble \mathcal{E} des nombres réels ρ de l'intervalle $]0, 2R[$ tels que $AF \geq L$ est le segment $[R, R\sqrt{3}]$.

5. Soit E un point du disque de centre O et de rayon R, distinct du point A.



La droite (AE) coupe le cercle \mathcal{C} en un point E' autre que le point A.

5.1. Démontrer que $AE' \geq L$ si et seulement si le point E appartient au domaine grisé sur la figure ci-contre.

5.2. Déterminer l'aire du domaine grisé, ensemble des points E du disque tels que la corde $[AE']$ associée soit de longueur supérieure ou égale à L.

Partie III

Le paradoxe de Joseph Bertrand (1822 – 1900)

Joseph Bertrand fut élève et professeur à l'Ecole polytechnique, puis professeur au Collège de France. Nous lui devons le paradoxe abordé aujourd'hui qui, au même titre que « l'aiguille de Buffon », a contribué à établir la nécessité de préciser le sens de la phrase « choisir au hasard » quand le choix s'opère dans un ensemble infini.

L'énoncé du problème posé par Joseph Bertrand peut être donné sous la forme suivante :

« Traçons au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus longue que le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ? »

Nous allons voir que selon la façon de modéliser le problème, le sens donné au terme « choisir au hasard » varie et les résultats relatifs aux probabilités sont différents.

Dans ce qui suit, on adopte les conventions suivantes :

- « Choisir au hasard » un réel x dans un intervalle $]a, b[$ (avec $a < b$) signifie que la probabilité que pour tout segment $[c, d]$ inclus dans l'intervalle $]a, b[$ le réel x appartienne au segment $[c, d]$ vaut $\frac{d-c}{b-a}$.
- « Choisir au hasard » un point M dans un segment $[PQ]$ (avec $P \neq Q$) signifie que pour tout segment $[XY]$ inclus dans le segment $[PQ]$, la probabilité que le point M appartienne au segment $[XY]$ vaut $\frac{XY}{PQ}$.
- « Choisir au hasard » un point M sur le cercle \mathcal{C} signifie que pour tout arc $\overset{\frown}{XY}$ du cercle \mathcal{C} , la probabilité que le point M appartienne à l'arc $\overset{\frown}{XY}$ vaut $\frac{\text{longueur de } \overset{\frown}{XY}}{\text{périmètre du cercle}}$.
- « Choisir au hasard » un point M dans un sous-ensemble Ω du plan dont on peut calculer l'aire (et dont l'aire est non nulle) signifie que, pour tout sous-ensemble Δ de Ω dont on peut calculer l'aire, la probabilité que le point M appartienne au sous-ensemble Δ vaut $\frac{\text{aire de } \Delta}{\text{aire de } \Omega}$.

1. Premier modèle proposé

On fixe un point A sur le cercle \mathcal{C} .

On « choisit au hasard » un point P du cercle \mathcal{C} .

Calculer la probabilité que la corde $[AP]$ du cercle \mathcal{C} ait une longueur supérieure ou égale à L .

2. Deuxième modèle proposé

On fixe un diamètre $[AA'']$ du cercle \mathcal{C} .

On « choisit au hasard » un point I du diamètre $[AA'']$ puis on trace la corde $[MN]$ du cercle \mathcal{C} perpendiculaire au diamètre $[AA'']$ au point I .

Calculer la probabilité que la corde $[MN]$ ait une longueur supérieure ou égale à L .

3. Troisième modèle proposé

On fixe un point T sur le cercle \mathcal{C} .

On « choisit au hasard » un réel θ dans l'intervalle $]0, \pi[$ puis on construit une corde $[AS]$ du cercle \mathcal{C} telle que l'angle géométrique \widehat{ATS} ait pour mesure θ .

Calculer la probabilité que la corde $[AS]$ ait une longueur supérieure ou égale à L .

4. Quatrième modèle proposé

On fixe un point D du cercle \mathcal{C} .

On « choisit au hasard » un réel ρ de l'intervalle $]0, 2R[$. Alors le cercle \mathcal{C} et le cercle de centre D et de rayon ρ se coupent en deux points distincts notés A et F .

Calculer la probabilité que la corde $[AF]$ du cercle \mathcal{C} ait une longueur supérieure ou égale à L .

5. Cinquième modèle proposé

On fixe un point A sur le cercle \mathcal{C} .

Puis « on choisit au hasard » un point E à l'intérieur du disque de centre O et de rayon R .

La droite (AE) coupe le cercle \mathcal{C} en un point E' , distinct du point A .

Calculer la probabilité que la corde $[AE']$ du cercle \mathcal{C} ait une longueur supérieure ou égale à L .

Problème 2

Etude d'une courbe plane définie par une équation implicite

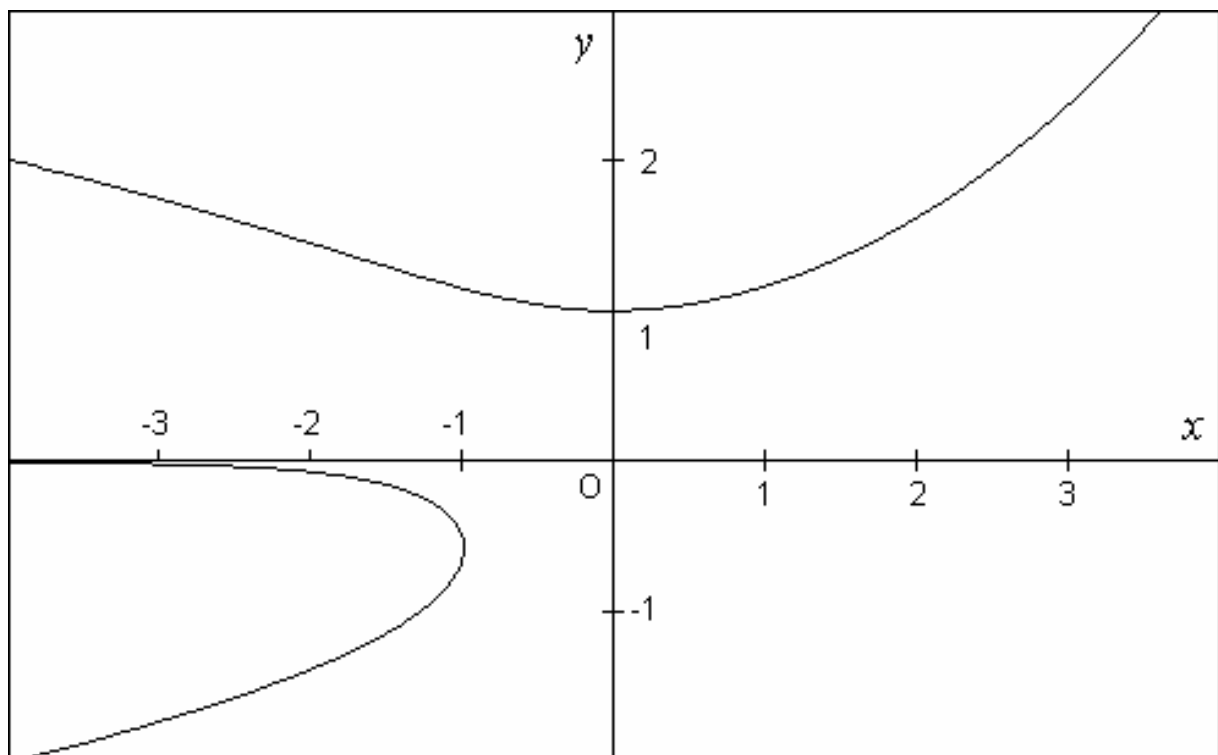
Présentation du problème

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe Γ du plan définie par l'équation suivante dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$:

$$y^3 + xy - e^x = 0$$

ce qui signifie qu'un point M du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un point de la courbe Γ si et seulement si $y^3 + xy - e^x = 0$.

Un logiciel de tracé de courbes nous montre (approximativement) les points de la courbe Γ pour $-4 \leq x \leq 4$ et $-2 \leq y \leq 3$:



Le but de ce problème est l'étude de l'ensemble des points de Γ d'ordonnée strictement positive.

La partie I prouve l'existence d'une fonction f telle que l'ensemble des points de Γ d'ordonnée strictement positive est une courbe Γ_1 d'équation $y = f(x)$.

La partie II étudie les variations de la fonction f et la partie III permet la mise en évidence d'une courbe asymptote à la courbe Γ_1 .

On pourrait également prouver l'existence d'une fonction g telle que l'ensemble des points de Γ d'ordonnée strictement négative est une courbe Γ_2 d'équation $x = g(y)$ mais cette étude n'est pas développée dans ce problème.

Partie I

Définition de la fonction f

1. Justifier l'existence d'un unique point de Γ d'abscisse $x = 0$.
2. Démontrer qu'aucun point M de Γ n'a une ordonnée nulle c'est-à-dire que l'intersection de Γ avec l'axe $x'Ox$ d'équation $y = 0$ est vide.
3. Dans cette question on note φ_2 la fonction définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi_2(t) = t^3 + 2t - e^2.$$

- 3.1. Soit t un nombre réel strictement positif vérifiant l'équation $\varphi_2(t) = 0$, s'il en existe. Que peut-on dire du point M de coordonnées $(2, t)$?
- 3.2. Justifier que la fonction φ_2 est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- 3.3. Dresser le tableau de variations de la fonction φ_2 .
- 3.4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel y_2 strictement positif tel que $\varphi_2(y_2) = 0$.
- 3.5. A l'aide de la calculatrice, justifier l'encadrement suivant :

$$\frac{3}{2} < y_2 < \frac{7}{4}.$$

4. Dans cette question on note φ_{-2} la fonction définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi_{-2}(t) = t^3 - 2t - e^{-2}.$$

- 4.1. Dresser le tableau de variations de la fonction φ_{-2} .

4.2. En déduire qu'il existe un unique nombre réel y_{-2} tel que $\varphi_{-2}(y_{-2}) = 0$.

4.3. Prouver que 1,45 est une valeur approchée à $5 \cdot 10^{-3}$ près du nombre réel y_{-2} .

5. Dans cette question, x est un nombre réel quelconque fixé.

On note φ_x la fonction définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi_x(t) = t^3 + xt - e^x.$$

5.1. Justifier que la fonction φ_x est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

5.2. Dresser le tableau de variations de la fonction φ_x dans chacun des deux cas suivants :

◆ $x < 0$.

◆ $x \geq 0$.

5.3. Déduire de cette étude que, pour tout nombre réel x , il existe un unique nombre réel y_x strictement positif tel que $\varphi_x(y_x) = 0$. Ce nombre réel y_x est noté $f(x)$.

x désignant un nombre réel fixé, $f(x)$ est donc déterminé par les conditions suivantes :

$$(1) \quad [f(x)]^3 + x f(x) - e^x = 0 \quad \text{et} \quad f(x) > 0$$

Ainsi la fonction f est définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}^{+} . La courbe Γ_1 représentative de la fonction f dans le repère $(\mathbf{O} ; \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points de la courbe Γ d'ordonnée strictement positive.*

6. Quelques études de signes

6.1. Démontrer que, pour tout nombre réel x , on a : $3[f(x)]^2 + x > 0$.

6.2. Démontrer, à l'aide de la question (I.5.2), que pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel t strictement positif, les expressions $t^3 + xt - e^x$ et $t - f(x)$ sont de même signe et s'annulent simultanément.

7. Calcul de quelques valeurs de f

7.1. Déterminer $f(0)$.

7.2. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de $f(2)$ et de $f(-2)$.

Partie II

Etude des variations de la fonction f

1. **Nous admettons** que la fonction f , définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} , est dérivable sur \mathbb{R} .

1.1. Démontrer, à l'aide des conditions (1) et de la question I.6, qu'on a pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x - f(x)}{3[f(x)]^2 + x}.$$

1.2. En déduire que pour tout nombre réel x , $f'(x)$ est du signe de $e^{2x} + x - 1$.

1.3. Etudier les variations de la fonction u définie pour tout nombre réel x par :

$$u(x) = e^{2x} + x - 1.$$

1.4. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x .

2. Calcul des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2.1. Démontrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2.2. Déterminer la limite de $e^x - x^3 - x^2$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif A tel que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à

$$A, \text{ on a : } e^x \geq x^3 + x^2.$$

2.3. Démontrer que pour tout nombre réel x supérieur ou égal à A , on a : $f(x) \geq x$.

2.4. En déduire que la fonction f a une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Partie III

Etude d'une courbe asymptote à la courbe Γ_1

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur l'intervalle $] -\infty ; 0[$ à valeurs dans \mathbb{R} .

On dit que les courbes d'équations $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ sont asymptotes l'une de l'autre au voisinage de $x = -\infty$ quand $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_2(x) - f_1(x)) = 0$.

Si de plus pour tout nombre réel x de l'intervalle $] -\infty ; 0[$, on a $f_1(x) \leq f_2(x)$, on dit que la courbe d'équation $y = f_2(x)$ est au dessus de la courbe d'équation $y = f_1(x)$.

1. Recherche d'une courbe asymptote à Γ_1 au voisinage de $x = -\infty$.

1.1. Démontrer que, pour tout nombre réel x , on a :

$$f(x) = \sqrt{\frac{e^x}{f(x)} - x}.$$

1.2. Démontrer que la courbe d'équation $y = \sqrt{-x}$ est asymptote à la courbe Γ_1 représentative de la fonction f au voisinage de $x = -\infty$, et déterminer la position relative de ces deux courbes lorsque le nombre réel x décrit l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

2. Tracer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ_1 et la courbe d'équation $y = \sqrt{-x}$, avec une unité graphique de 2 cm.
