OPTIONS M ET P' - EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 2 HEURES)

- - - -

L'énoncé de cette épreuve commune aux candidats des options M et P' comporte 2 pages.

- - - -

- Indications préliminaires -

I - Le candidat indiquera, au début de sa copie, le titre et le nom de l'auteur des tables numériques utilisées.

II - On rappelle, en désignant par x et z deux réels, que les relations

$$\begin{cases} z = \text{Arc}\sin x \\ |x| \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \sin z \\ |z| \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sont équivalentes.

III - Les questions 4°) et 5°) du problème sont indépendantes l'une de l'autre.

- - - -

PROBLEME

On désigne par x une variable réelle, et par Δ le domaine de définition de la fonction à valeurs réelles, notée f, telle que

$$f(x) = \frac{\text{Arc}\sin x}{4x^2-1}.$$

1°) Montrer que Δ est la réunion des trois intervalles

$$[-1, -\tfrac{1}{2}[\quad ; \quad]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[\quad ; \quad]\tfrac{1}{2}, 1].$$

Dans quel domaine Δ' la fonction f admet-elle des dérivées première et seconde, notées f' et f'' ? Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \Delta'$.

2°) Pour étudier le signe de $f'(x)$, on définit, dans un domaine Δ'' que l'on précisera, une fonction u par la relation

$$u(x) = \frac{(4x^2-1)^2}{x} \cdot f'(x)$$

Cette fonction u admet, dans Δ'', une dérivée u' ; calculer $u'(x)$ pour $x \in \Delta''$.

Etudier les variations et le signe de $u(x)$ lorsque x parcourt Δ''.
Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une racine positive, notée α, vérifiant l'inégalité $\frac{\sqrt{3}}{2} < \alpha < 1$. (Le calcul d'une valeur décimale approchée de α fait l'objet de la question 5°))

3°) Etudier les variations de $f(x)$ lorsque x parcourt Δ. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (origine O, axes $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$), on considère la courbe (C) ayant pour équation $y = f(x)$.

Indiquer sommairement l'allure de (C), après avoir construit les tangentes à (C) aux points ayant pour abscisses : -1, 0, $+1$.

.../...

4°) En vue d'étudier le signe de f" (x), on considère la fonction V définie dans Δ' par la relation

$$f''(x) = \frac{12x^2 + 1}{(4x^2 - 1)^3} V(x).$$

On désigne par ϕ la fonction, définie pour $x \neq 0$, par la relation

$$\phi(x) = \frac{(4x^2 - 1)^2}{x}$$

et par ϕ' la dérivée première de ϕ. Etablir, pour $x \in \Delta''$, les relations :

$$f'(x) = \frac{1}{\phi(x)} \cdot u(x) \quad ; \quad f''(x) = \frac{\phi'(x)}{[\phi(x)]^2} \cdot V(x) \quad ;$$

$$V(x) = -u(x) + \phi(x) \frac{u'(x)}{\phi'(x)}$$

Calculer $V'(x)$ pour $x \in \Delta'$.

Etudier les variations et le signe de V (x), ainsi que le signe de f" (x), lorsque x parcourt Δ'.

La courbe (C) a-t-elle des points d'inflexion ?

5°) Calculer une valeur décimale approchée :

- du nombre α, racine positive de l'équation $u(x) = 0$,
- du nombre $f(\alpha)$.

Le candidat indiquera la marche adoptée pour organiser et conduire les calculs, de façon à obtenir la meilleure approximation possible, compte-tenu des tables numériques utilisées, et précisera la marge d'incertitude correspondant à chacun des résultats obtenus.
