Centrale TSI 2002 - Mathématiques 2
$\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta$

Partie I

I.A1. $\underline{tr \text{ est évidemment linéaire de } M_2 \text{ dans } \mathbb{R}}$.

Soient A et $B \in M_2$ et posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. On a alors :

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{ki}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ik}b_{ki}\right) \text{ (commutativité et associativité de +)} \\ &= \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2} b_{ki}a_{ik}\right) \text{ (commutativité de } \times) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2} b_{ik}a_{ki}\right) \text{ (indices muets)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{tr(AB) = tr(BA)}$$

On a évidemment :

$$\boxed{tr(A) = tr({}^tA)}$$

la transposition ne changeant pas la diagonale de A.

I.A.2. $\forall A, B, C \in M_2$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$\rightarrow tr(A^tB) = tr({}^t(A^tB)) = tr(B^tA)$, d'où : $(U, V) \rightarrow tr(U^tV)$ est symétrique

$\rightarrow tr\left((\lambda A + \mu B)^t C\right) = tr\left(\lambda A^tC + \mu B^tC\right) = \lambda tr\left(A^tC\right) + \mu tr\left(B^tC\right)$ et $(U, V) \rightarrow tr(U^tV)$ est bilinéaire (puisque symétrique)

$\rightarrow$ Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $A^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$ et $tr(A^tA) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$.

En outre $A \neq 0 \Rightarrow tr(A^tA) > 0$ et $(U, V) \rightarrow tr(U^tV)$ est définie positive.

Donc,

$$\underline{(U, V) \rightarrow tr(U^tV) \text{ est un produit scalaire}}$$

I.B. $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\langle E_i, E_i\rangle$ est la somme des carrés des coefficients de E_i, donc vaut 1.

$$\langle E_1, E_2\rangle = \langle E_2, E_1\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle E_1, E_3\rangle = \langle E_3, E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle E_1, E_4\rangle = \langle E_4, E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle E_2, E_3\rangle = \langle E_3, E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle E_2, E_4\rangle = \langle E_4, E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\langle E_3, E_4\rangle = \langle E_4, E_3\rangle = \frac{1}{2}tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

D'où $\underline{B_0 \text{ est une base orthonormée de } M_2}$.

$E_1,\ E_2,\ E_3 \in S_2$ et $\dim S_2 = 3$; d'où

$$\boxed{(E_1,\ E_2,\ E_3) \text{ est une base orthonormée de } S_2.}$$

I.C.1. $\det(M) = \det\left(\sum_{i=1}^{4} x_iE_i\right) = \det\left(x_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= \det\left(\left(\begin{array}{cc} x_1 & \dfrac{x_3+x_4}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{x_3-x_4}{\sqrt{2}} & x_2 \end{array}\right)\right)$$
$$= x_1x_2 - \frac{x_3^2-x_4^2}{2}$$

D'où :

$$\boxed{\det(M) = x_1x_2 + \frac{x_4^2-x_3^2}{2}}$$

I.C.2. $\det\circ\Psi$ est l'application : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (a,b,c,d) \to ad-bc \end{array}$. C'est un polynôme homogène de degré 2 en a, b, c, d. D'où :

$$\boxed{\det\circ\Psi \text{ est une forme quadratique sur } \mathbb{R}^4.}$$

Posons $(a,b,c,d) = \sum\limits_{i=1}^{4} x_ie_i$. On a alors : $(a,b,c,d) = \left(x_1, \dfrac{x_3+x_4}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_3-x_4}{\sqrt{2}}, x_2\right)$ et :

$\det\circ\Psi\left(\sum\limits_{i=1}^{4} x_ie_i\right) = \det\circ\Psi\left(x_1, \dfrac{x_3+x_4}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_3-x_4}{\sqrt{2}}, x_2\right) = \det\left(\sum\limits_{i=1}^{4} x_iE_i\right) = x_1x_2 + \dfrac{x_4^2-x_3^2}{2}$

D'où la matrice de $\det\circ\Psi$ dans la base e :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Partie II

II.A. Posons $q = \det$. Comme $\forall M, N \in M_2(\mathbb{R})$, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$, $q(MN) = q(M)q(N)$ et $q\circ\Psi$ est l'application : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (a,b,c,d) \to ad-bc \end{array}$, donc $q\circ\Psi$ est une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^4$.

det est donc un exemple d'application q solution du problème posé.

II.B. $q(0) = q\circ\Psi(0,0,0,0)$ (car $\Psi(0,0,0,0) = 0$)
$= 0$ (car par une forme quadratique 0 a pour image 0). Donc :

$$\boxed{q(0) = 0}$$

$q(I) = q(I^2) = q(I)^2 \Rightarrow q(I) = 0$ ou $q(I) = 1$. Supposons $q(I) = 0$, alors $\forall M \in M_2$, $q(M) = q(MI) = q(M)q(I) = 0$. Or $q \neq 0$, car $q\circ\Psi \neq 0$, donc :

$$\boxed{q(I) = 1}$$

II.C. Supposons $rg(M) = 2$. On a alors M inversible et $q(M\times M^{-1}) = q(I) = 1 \Rightarrow$
$q(M)\times q(M^{-1}) = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{q(M) \neq 0}$$

II.D.1. Comme $rg(M) = 1$, $rg(f) = 1$ et $\dim\ker f = \dim\mathbb{R}^2 - rg(f) = 1$, cequi montre qu'il existe un vecteur non nul v tel que $\ker(f) = Vect(v)$.

Grâce au théorème de la base incomplète, v peut être complété en une base (u,v) de $\mathbb{R}^2$.
$u \notin \ker(f)$, donc $f(u) \neq 0$ et $f(u)$ peut être complété en une base $(w, f(u))$ de $\mathbb{R}^2$.
Soit Q la matrice de passage de B_1 à $B_2 = (u,v)$ et P_1 la matrice de passage de B_1 à $B_3 = (f(u), w)$.
La matrice f relativement aux bases B_2 et B_3 est donc $P_1^{-1}MQ$ et c'est aussi la matrice $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(u) & f(v) \end{array} \\ \begin{array}{c} w \\ f(u) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$.

Donc:

$$\boxed{\text{il existe 2 matrices } P \text{ et } Q \text{ inversibles } (P = P_1^{-1}) \text{ telles que } PMQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

II.D.2. On a alors $q(PMQ) = q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Or $q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\right) = q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$.

D'où $q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ et $q(PMQ) = 0 \Rightarrow q(P)q(M)q(Q) = 0$, ce qui prouve :

$$\boxed{q(M) = 0}$$

car $q(P) \neq 0$ et $q(Q) \neq 0$.

II.E. On a vu que si $rg(M) < 2$, c'est-à-dire M non inversible, $q(M) = 0$ et que si $rg(M) = 2$, $q(M) \neq 0$.
Donc :

$$\boxed{M \in GL_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow q(M) \neq 0}$$

II.F.1. f est le polynôme caractéristique de M. Donc :

<u>f est une fonction polynômiale degré 2 dont les racines sont λ_1 et λ_2.</u>

II.F.2. L'on sait que φ est bilinéaire symétrique et $\forall M \in M_2$, $q(M) = \varphi(M,M)$.
D'où :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ g(\lambda) = q(M) - 2\lambda\varphi(M,I) + \lambda^2}$$

(car $q(I) = 1$)
Or $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ q(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow M - \lambda I$ non inversible
$\Leftrightarrow \det(M - \lambda I) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda \in Spec(M)$.

D'où $g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$. Donc <u>les racines de g sont λ_1 et λ_2</u>, ce qui montre que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ et que $f = g$.
On en déduit $f(0) = g(0)$, ce qui équivaut à :

$$\boxed{\det(M) = q(M)}$$

II.G.1.La méthode de la question II.F. ne peut s'appliquer à une matrice non trigonalisable, par exemple $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $X^2 + 1$.

II.G.2. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$.

Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = P_1 M$ avec $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible.

Posons $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ 0 & d - \dfrac{bc}{a} \end{pmatrix}$, alors $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ c & d \end{pmatrix} = P_2 M_1$ avec $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$ inversible.

D'où $q(M_2) = q(P_2 P_1 M) = q(P_2) q(P_1) q(M)$. Or P_1, P_2, M_2 sont triangulaires. D'où $q(M_2) = \det(M_2) = d - \dfrac{bc}{a}$, $q(P_2) = \det(P_2) = 1$ et $q(P_1) = \det(P_1) = \dfrac{1}{a}$.

D'où : $d - \dfrac{bc}{a} = \dfrac{1}{a} q(M) \Leftrightarrow$

$$\boxed{q(M) = ad - bc = \det(M)}$$

II.G.3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = M'$

D'après les questions précédentes, $q\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M\right) = q(M') = \det(M')$ (d'après II.G.2.) et donc : $q\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) q(M) = -bc \Rightarrow$

$$\boxed{q(M) = ad - bc = \det(M)}$$

II.G.4. Si $a = c = 0$, M est triangulaire et $q(M) = \det(M)$.
On a donc montré :

$$\boxed{\forall M \in M_2,\ q(M) = ad - bc = \det(M)}$$

<u>Partie III</u>

III.A. det est une formle quadratique non nulle sur M_2, donc sur le sous-espace S_2. On en déduit que :

$$\boxed{\Gamma_k \text{ est une quadrique.}}$$

D'après la question I.C.1., si $M = xE_1 + yE_2 + zE_3$, $\det(M) = xy - \dfrac{z^2}{2}$. Donc :

$$\boxed{\Gamma_k \text{ a pour équation cartésienne } xy - \frac{z^2}{2} - k = 0}$$

III.B.1. Γ_0 a pour équation $xy - \dfrac{z^2}{2} = 0$ (c'est un cône de sommet O). Si $M(x,y,z) \in \Gamma_0 \backslash \{0\}$, un point N de (OM) a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ où et λ est un réel quelconque.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda x)(\lambda y) - \dfrac{(\lambda z)^2}{2} = \lambda^2 \left(xy - \dfrac{z^2}{2}\right) = 0$. Donc :

$$\boxed{(OM) \subset \Gamma_0 \text{ et } \Delta_M = (OM)}$$

III.B.2. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \to xy - \dfrac{z^2}{2} \end{array}$. f est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et $\forall M_0 \in S_2 \backslash \{0\}$, $\overrightarrow{grad}\ f(M_0)$ a pour composantes $(y_0, x_0, -z_0) \neq (0,0,0)$. Donc :

$$\boxed{\text{le plan tangent en } M_0 \text{ à } \Gamma_0 \text{ a pour équation : } y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0}$$

où (x,y,z) représente le triplet des composantes d'un point du plan tangent.

En particulier, un point de Δ_{M_0} a pour coordonnées $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ où et λ est un réel quelconque et vérifie :

$y_0 (\lambda x_0 - x_0) + x_0 (\lambda y_0 - y_0) - z_0 (\lambda z_0 - z_0) = 2 (\lambda - 1) \left(x_0 y_0 - \dfrac{z_0^2}{2} \right) = 0$. Donc :

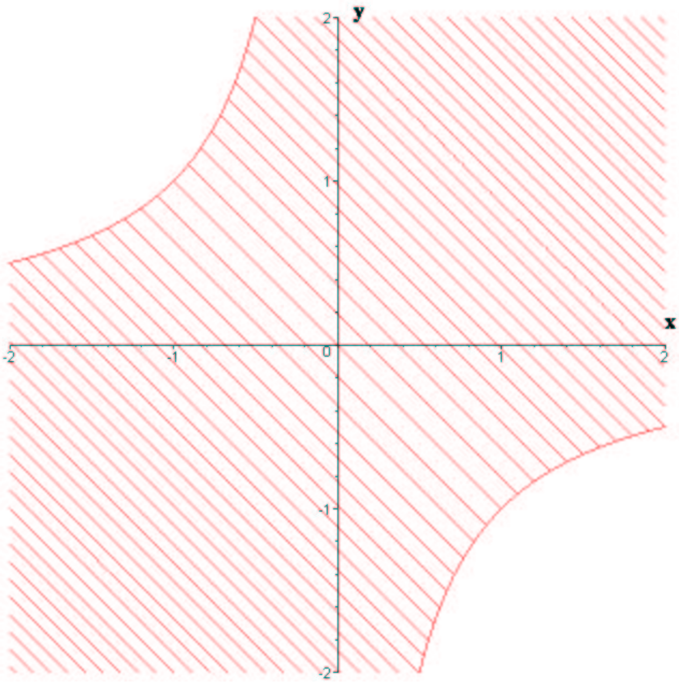
$$\boxed{\Delta_{M_0} \text{ est incluse dans le plan tangent en } M_0 \text{ à } \Gamma_0.}$$

III.C.1. Γ_{-1} a pour équation $xy - \dfrac{z^2}{2} = -1$. Notons p la projection orthogonale sur le plan xOy. Un point $M(x, y, 0)$ appartient à $p(\Gamma_{-1})$ si et seulement si :

$\exists z \in \mathbb{R},\ xy - \dfrac{z^2}{2} = -1 \Leftrightarrow$

$\exists z \in \mathbb{R},\ z^2 = 2(xy + 1) \Leftrightarrow xy + 1 \geq 0$. Donc :

$$\boxed{p(\Gamma_{-1}) \text{ est l'ensemble des points de } xOy \text{ vérifiant } xy + 1 \geq 0.}$$



III.C.2. Γ_{-1} a pour équation $xy - \dfrac{z^2}{2} = -1$. Notons q la projection orthogonale sur le plan xOz. Un point $M(x, 0, z)$ appartient à $q(\Gamma_{-1})$ si et seulement si :

$\exists y \in \mathbb{R},\ xy - \dfrac{z^2}{2} = -1 \Leftrightarrow$

$\exists y \in \mathbb{R},\ xy - \dfrac{z^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x \neq 0$ ou $x = 0$ et $-\dfrac{z^2}{2} + 1 = 0$. Donc :

$$\boxed{q(\Gamma_{-1}) \text{ est } (xOz \backslash (Oz)) \cup \{A, B\} \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont les points de coordonnées } \left(0, 0, \sqrt{2}\right) \text{ et } \left(0, 0, -\sqrt{2}\right)}$$

III.C.3. Considérons les droites passant par A et B dirigées par $\overrightarrow{j}$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\sqrt{2} \end{cases}$.

Si M est un point de l'une des deux droites, l'on a : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ xy - \dfrac{z^2}{2} = -1$. donc :

$$\boxed{\text{ces deux droites, strictement parallèles sont incluses dans } \Gamma_{-1}.}$$

III.D.1. Posons $U = \dfrac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}}$ et $V = \dfrac{-E_1 + E_2}{\sqrt{2}}$. La matrice de passage de (E_1, E_2, E_3) à (U, V, E_3) est alors $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les formules de changement de repère sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

Dans le repère R', Γ_k a alors pour équation $\dfrac{X^2 - Y^2}{2} - \dfrac{Z^2}{2} = k \Leftrightarrow$

$$\boxed{X^2 - Y^2 - Z^2 = 2k.}$$

III.D.2. D'où :

$\rightarrow$ <u>si $k > 0$, Γ_k est un hyperboloïde de révolution d'axe OX à deux nappes.</u>

$\rightarrow$ <u>si $k < 0$, Γ_k est un hyperboloïde de révolution d'axe OX à une nappe.</u>

$\rightarrow$ <u>si $k = 0$, Γ_k est un cône de révolution d'axe OX de sommet O.</u>

<u>Partie IV</u>

IV.A.1.

a. Soit $M \in GL_2(\mathbb{R})$; comme Φ est bijective, il existe $P \in M_2$ telle que $\Phi(P) = M$. On a alors :

$\Phi(IP) = \Phi(I)\Phi(P) \Rightarrow$

$\Phi(P) = \Phi(I)\Phi(P) \Rightarrow$

$M = \Phi(I)M \Rightarrow$ (en multipliant à gauche par M^{-1})

$$\boxed{\Phi(I) = I}$$

b. Soit $M \in S_2$; on a alors ${}^t\Phi(M) = \Phi({}^tM) = \Phi(M)$; d'où $\Phi(M) \in S_2$. Donc $\Phi(S_2) \subset S_2$ et comme Φ est bijective et que S_2 est de dimension finie,

$$\boxed{\Phi(S_2) = S_2}$$

c. Posons $M = \Phi(E_4)$; on a alors $\Phi({}^tE_4) = {}^t\Phi(E_4) \Rightarrow$

$\Phi(-E_4) = {}^t\Phi(E_4) \Rightarrow M = \Phi(E_4) \in A_2$: ensemble des matrices antisymétriques de M_2.

Posons $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$; on a alors $M^2 = \Phi(E_4)^2 = \Phi(E_4^2) = \Phi\left(-\dfrac{1}{2}I\right) = -\dfrac{1}{2}I$.

D'où $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}I \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; d'où :

$$\boxed{\Phi(E_4) = \pm E_4}$$

IV.A.2. Soit $M \in M_2$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in GL_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \exists P \in GL_2(\mathbb{R}),\ MP = I \\ &\Leftrightarrow \exists P \in GL_2(\mathbb{R}),\ \Phi(MP) = \Phi(I) \text{ (car } \Phi \text{ est bijective)} \\ &\Leftrightarrow \exists P \in GL_2(\mathbb{R}),\ \Phi(M)\Phi(P) = I \\ &\Leftrightarrow \Phi(M) \in GL_2(\mathbb{R}). \text{ On a montré :} \end{aligned}$$

$$\boxed{M \in GL_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \Phi(M) \in GL_2(\mathbb{R})}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_0 = \{M \in S_2 / \det(M) = 0\} \text{ ; donc } \Phi(\Gamma_0) &= \{\Phi(M) / M \in S_2 \text{ et } \det(M) = 0\} \\ &= \Phi(S_2) \cap \Phi(M_2 \backslash GL_2(\mathbb{R})) = \Gamma_0 \end{aligned}$$

car $\Phi(S_2) = S_2$ et $\Phi\left(M_2 \backslash GL_2(\mathbb{R})\right) = M_2 \backslash GL_2(\mathbb{R})$. Donc :

$$\boxed{\Phi\left(\Gamma_0\right) = \Gamma_0}$$

IV.B.1. Φ_A est évidemment un endomorphisme de M_2.
$\rightarrow$ Supposons que Φ_A possède la propriété $\mathbf{P}$. Alors :
D'après *IV.A.1.*, $\Phi_A(I) = I \Leftrightarrow A^2 = I$.
$\rightarrow$ Réciproquement, supposons $A^2 = I$. Alors $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A$.
Soient $M,\ M' \in M_2$.
On a alors $\Phi_A(M) = 0 \Leftrightarrow AMA = 0 \Leftrightarrow M = 0$ (car A est inversible); d'où $\ker \Phi_A = \{0\}$, Φ_A est injective et donc bijective, puisque M_2 est de dimension finie.
$\Phi_A(MM') = AMM'A = AMAAM'A = \Phi_A(M)\,\Phi_A(M')$ (puisque $A^2 = I$)
$\Phi_A({}^tM) = A{}^tMA = {}^tA{}^tM{}^tA = {}^t(AMA) = {}^t\Phi_A(M)$ (puisque $A \in S_2$)
On a donc montré :

$$\boxed{\Phi_A \text{ possède la propriété } \mathbf{P} \Leftrightarrow A^2 = I}$$

IV.B.2. A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et il existe $P \in O(2)$ telle que ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. En outre $A^2 = I \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 = 1$

$\Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm 1$. D'où $A = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}{}^tP$ et :

$\rightarrow {}^tA = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}{}^tP = A :\ A \in S_2$

$\rightarrow {}^tAA = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}{}^tPP\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}{}^tP = I :\ A \in O(2)$.

Donc A est orthogonale symétrique.

On en déduit qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$, $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Dans le premier cas, $A^2 = I \Leftrightarrow \cos(2\theta) = 1$ et $\sin(2\theta) = 0$
$\Leftrightarrow \theta \equiv 0 \bmod \pi$
$\Leftrightarrow A = I$ ou $A = -I$ (cas exclus)
Dans le second cas, on a bien $A^2 = I$ et $A \in S_2$. On a montré :

$$\boxed{\exists \theta \in [0, 2\pi[,\ A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
\text{On a alors } \Phi_A(E_4) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ donc :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi_A(E_4) = -E_4}$$

IV.B.3. $\forall \theta \in [0, 2\pi[$, $A = \sqrt{2}\left(\cos(\theta)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sin(\theta)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Or, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille orthonormée de S_2.
D'où, lorsque θ décrit $[0, 2\pi[$,

$$\boxed{A \text{ décrit le cercle de } S_2 \text{ de centre } O \text{ de rayon } \sqrt{2} \text{ du plan passant par } O \text{ dirigé par } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

IV.B.4. Soit $M \in M_2$.
$\|\Phi_A(M)\|^2 = tr(\Phi_A(M)^t \Phi_A(M))$
$= tr(AMAA^tMA)$
$= tr(AM^tMA)$ (car $A^2 = I$)
$= tr(M^tMA^2)$ (car $tr(XY) = tr(YX)$)
$= tr(M^tM)$
$= \|M\|^2$. donc :

$$\boxed{\Phi_A \in O(M_2)}$$

Soit $M \in S_2$, $\Phi_A^2(M) = A(AMA)A = M$; donc $\Phi_A = Id_{M_2}$ et Φ_A est une symétrie vectorielle.

$$\boxed{\Phi_A \text{ est donc une symétrie orthogonale.}}$$

IV.B.5.

a. Dans la base orthonormée (E_1E_2, E_3), I a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et A a pour composantes $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ \sqrt{2}\sin(\theta) \end{pmatrix}$. I et A étant 2 vecteurs orthogo naux et non nuls, forment une famille libre. Un vecteur normal à $Vect(\{I, A\})$ est le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \sqrt{2}\cos(\theta) \end{pmatrix}$, c'est à dire la matrice $B = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \neq 0$. On alors :

$\Phi_A(B) = ABA = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}$
$= -B$

Donc la restriction de Φ_A à S_2 est distincte de l'identité. C'est une symétrie orthogonale de S_2. Comme $\Phi_A(I) = I$, $\Phi_A(A) = A$ et (I, A) est libre, l'espace des invariants de Φ_A est de dimension 2 et

$$\boxed{\Phi_A \text{ est la réflexion par rapport au plan } Vect(\{I, A\})}$$

b. $\Phi_A(U) = \Phi_A(\frac{I}{\sqrt{2}}) = U$
$\Phi_A(V) = AVA = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$
$= \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2}} E_1 - \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2}} E_2 + \sin(2\theta) E_3$
$= \cos(2\theta) V + \sin(2\theta) E_3$
$\Phi_A(E_3) = AE_3A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \\ -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \end{pmatrix}$
$= \sin(2\theta)\, V - \cos(2\theta)\, E_3$

D'où la matrice de la restriction de Φ_A à S_2 dans la base (U, V, E_3) :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}}$$

IV.C.1. $\det \circ \Phi(I) = \det(I) = 1$ et $\det \circ \Phi \neq 0$

det est une forme quadratique sur M_2 : c'est un ploynôme homogèbne de degré 2 an les composantes d'une matrice de M_2 dans la base B_0. Appelons φ sa forme polaire et posons, pour toutes $M, N \in M_2$, $\varphi'(M, N) = \varphi(\Phi(M), \Phi(N))$.

φ' est alors évidemment bilinéaire symétrique (φ l'est et $\Phi \in L(M_2)$)

$\forall M \in M_2$, $\varphi'(M, M) = \varphi(\Phi(M), \Phi(M)) = \det(\Phi(M))$.Donc :

$$\boxed{\det \circ \Phi \text{ est une forme quadratique non nulle sur } M_2.}$$

IV.C.2. L'on a $\forall M, N \in M_2$, $\det \circ \Phi(MN) = \det \circ (\Phi(M)\Phi(N))$ (propriété de Φ)
$= \det \circ (\Phi(M)) \det \circ (\Phi(N))$ (propriété de det)

Donc $\det \circ \Phi$ est une forme quadratique non nulle sur M_2 vérifiant $\forall M, N \in M_2$, $\det \circ \Phi(MN) = \det \circ (\Phi(M)) \det \circ (\Phi(N))$. D'où, d'après la question II.G.4.,

$$\boxed{\det \circ \Phi = \det}$$

Soit $M \in M_2$ et $k \in \mathbb{R}$; on a alors :
$M \in \Gamma_k \Leftrightarrow \det(M) = k$
$\Leftrightarrow \det(\Phi(M)) = k$
$\Leftrightarrow \Phi(M) \in \Gamma_k$. Donc :

$$\boxed{\Gamma_k \text{ est globalement invariante par } \Phi}$$

IV.C.3. L'on sait que $\Phi(U) = \Phi\left(\dfrac{I}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{I}{\sqrt{2}} = U$ et que $\Phi(E_4) = \pm E_4 = \varepsilon E_4$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Posons $\Phi(V) = aU + bV + cE_3 + dE_4$ et $\Phi(E_3) = \alpha U + \beta V + \gamma E_3 + \delta E_4$. Comme $\Phi(S_2) = S_2$, $d = \delta = 0$.

D'où $M_{\mathbf{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & a & \alpha & 0 \\ 0 & b & \beta & 0 \\ 0 & c & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$. On a alors $\forall M \in S_2$, $\det(\Phi(M)) = \det(M)$ et si $M = xU + yV + zE_3$, on obtient :

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $\det((x + ay + \alpha z)U + (by + \beta z)V + (cy + \gamma z)E_3) = \det(xU + yV + zE_3) \Leftrightarrow$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $\det\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x + ay + \alpha z + by + \beta z & cy + \gamma z \\ cy + \gamma z & x + ay + \alpha z - by - \beta z \end{pmatrix}\right) = \det\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x + y & z \\ z & x - y \end{pmatrix}\right.$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{2}\left((x + (a+b)y + (\alpha+\beta)z)(x + (a-b)y + (\alpha-\beta)z) - (cy + \gamma z)^2\right) = \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2 - z^2) \Leftrightarrow$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x + (a+b)y + (\alpha+\beta)z)(x + (a-b)y + (\alpha-\beta)z) - (cy + \gamma z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 \Leftrightarrow$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(a^2 - b^2 - c^2 + 1)y^2 + (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 1)z^2 + 2axy + 2\alpha xz + ((a+b)(\alpha-\beta) + (a-b)(\alpha+\beta)$
0.

Cela signifie qu'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ est nulle. D'où :

$a = \alpha = 0$, $b^2 + c^2 = 1$, $\beta^2 + \gamma^2 = 1$, $b\beta + c\gamma = 0$ et $\exists \theta$, $\theta' \in [0, 2\pi[$ tels que $b = \cos(\theta)$, $c = \sin(\theta)$, $\beta = \cos(\theta')$, $\gamma = \sin(\theta')$ et $\cos(\theta - \theta') = 0$, ce qui signifie $\theta' \equiv \theta + \dfrac{\pi}{2} \bmod \pi$ ou encore $\beta = \varepsilon' \sin(\theta)$ et $\gamma = -\varepsilon' \cos(\theta)$ avec $\varepsilon' = \pm 1$. Donc :

$$\boxed{\exists \theta \in [0, 2\pi[\,,\ \exists \varepsilon,\ \varepsilon' \in \{-1, 1\},\ M_{\mathbf{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \varepsilon' \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & -\varepsilon' \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}}$$

IV.C.4.

a. $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & -\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$; d'où $A^2 = I$ et Φ et $\Phi_A \in GL(M_2)$, donc $\Phi \circ \Phi_A \in GL(M_2)$.

$\forall M, N \in M_2$, $\Phi \circ \Phi_A (MN) = \Phi \circ (\Phi_A (M) \Phi_A (N)) = \Phi \circ \Phi_A (M) \Phi \circ \Phi_A (N)$ (car Φ et Φ_A vérifient la propriété $\mathbf{P}$)

$\forall M \in M_2$, $\Phi \circ \Phi_A ({}^tM) = \Phi \circ ({}^t\Phi_A (M)) = {}^t\Phi \circ \Phi_A (M)$ (car Φ et Φ_A vérifient la propriété $\mathbf{P}$). Donc :

$$\boxed{\Phi \circ \Phi_A \text{ vérifie la propriété } \mathbf{P}}$$

On a vu que $M_{\mathbf{B}} (\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ et que $M_{\mathbf{B}} (\Phi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

D'où :

$$\boxed{M_{\mathbf{B}} (\Phi \circ \Phi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}}$$

b. ${}^tU = U$, ${}^tV = V$, ${}^tE_3 = E_3$ car $U, V, E_3 \in S_2$. ${}^tE_4 = -E_4$ (E_4 est antisymétrique).

La matrice de la transposition dans $\mathbf{B}$ est donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Donc $\Phi \circ \Phi_A$ est soit Id_{M_2}, soit la transposition, mais :

${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

${}^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$ Donc la transposition ne vérifie pas **P.** D'où $\Phi \circ \Phi_A = Id_{M_2}$

$\Rightarrow \Phi = \Phi_A^{-1} = \Phi_A$ (car $A = A^{-1}$). Donc :

$$\boxed{\Phi = \Phi_A}$$

IV.C.5. On a vu que $M_{\mathbf{B}} (\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & +\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ et que $M_{\mathbf{B}} (\Phi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc :

$M_{\mathbf{B}} (\Phi \circ \Phi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & +\sin(2\theta) & 0 \\ 0 & \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} . M_{\mathbf{B}} (\Phi \circ \Phi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & +\sin(2\theta) & 0 \\ 0 & \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$

Posons $B = \sqrt{2} (\cos(\theta) V + \sin(\theta) E_3)$; alors $M_{\mathbf{B}} (\Phi_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & +\sin(2\theta) & 0 \\ 0 & \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ si $\varepsilon = -1$, $\Phi \circ \Phi_A = t \circ \Phi_B$ (où t désigne la transposition) ce qui montre :
$\Phi \circ \Phi_A \circ \Phi_C = t$: impossible, car t ne vérifie pas $\mathbf{P}$.
$\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$ et $\Phi \circ \Phi_A = \Phi_B \Leftrightarrow \Phi = \Phi_B \circ \Phi_A$. On a montré :

$$\boxed{\Phi = \Phi_B \circ \Phi_A \text{ avec } B = B = \sqrt{2} (\cos(\theta) V + \sin(\theta) E_3) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Rédigé par

Pierre Bron, *professeur de Spéciales TSI*
Lycée Chaptal, 6, *allée Chaptal*, 22000 *St Brieuc*
Tel. 0296639414
Adresse électronique : *BRON.Pierre@wanadoo.fr*

à l'aide de Scientific Workplace