

Généralités et exemples.

1. Si le produit infini $\prod_{n \geq 0} u_n$ converge alors $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}^*$ et donc $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. \square
2. a. Soit (u_n) une suite de réels non nuls convergeant vers 1. En écrivant le définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il vient qu'il existe n_0 tel que $u_n \geq \frac{1}{2}$ pour $n \geq n_0$. \square
2. b. Notons $C = \prod_{p=0}^{n_0-1} u_p$. Il vient que C est une constante non nulle (puisque aucun terme de la suite (u_n) n'est nul par hypothèse) et que $\prod_{p=0}^n u_p = C \prod_{p=n_0}^n u_p$ pour $n \geq n_0$ ce qui prouve que les produits infinis $\prod_{n \geq 0} u_n$ et $\prod_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature. \square
3. Dans toute cette question on peut envisager la suite $(\ln u_n)$ puisque (u_n) est une suite de réels strictement positifs.
3. a. La suite (P_n) est une suite de réels strictement positifs et donc, par caractérisation séquentielle de la continuité du logarithme dans un sens et de l'exponentielle dans l'autre, elle converge vers un réel ℓ non nul si et seulement si la suite $(\ln P_n)$ converge vers le réel $\ln \ell$.
 En d'autres termes si $u_n > 0$ alors le produit infini $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln u_n$ converge et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln u_n = \ln \prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln u_n\right)$. \square
2. b. • Comme $1 + u_n > 0$ il découle de 3.a que $\prod(1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum \ln(1 + u_n)$ converge.
 • Si cette série converge alors son terme général tend vers 0 donc u_n tend vers 0 et donc $\ln(1 + u_n) \sim u_n > 0$ ce qui prouve que la série $\sum u_n$ converge (séries à termes positifs équivalents).
 • Réciproquement si la série $\sum u_n$ converge alors son terme général tend vers 0 donc $u_n \sim \ln(1 + u_n) > 0$ ce qui prouve de la même manière que la série $\sum \ln(1 + u_n)$ converge.
 En conclusion si $u_n > 0$ alors le produit infini $\prod(1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. \square
3. c. Lorsque $0 < u_n < 1$ alors $1 - u_n > 0$ et par exactement la même démonstration que ci-dessus (sauf qu'on a affaire à des séries à termes négatifs donc de signe fixe -et donc la règle des équivalents est encore valable-) on prouve que le produit infini $\prod(1 - u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. \square
4. a. $\prod\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ converge puisque $\sum \frac{1}{4n^2}$ converge (question 3.c). \square
4. b. Idem pour $\prod\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ et $x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$. Pour $x = 0$ convergence évidente vers 1. Donc finalement convergence pour $x \in]-\pi, \pi[$. \square
4. c. Pour $x > 0$ on a $u_n = \underset{\text{DEF}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-x/n}} > 0$ donc, par la question 3.a, le produit infini $\prod u_n$ est de même nature que la série $\sum \ln u_n$. Or $\ln u_n = -\frac{x}{n} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc le produit infini converge. \square
5. a. Comme $\frac{1}{n} > 0$, la série $\sum \frac{1}{n}$ est de même nature que le produit infini $\prod\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Or $P_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = n + 1$ donc il y a divergence. \square
5. b. Pour $p \geq 2$ on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$ (série géométrique). \square
5. c. D'après la question 3.c la série $\sum \frac{1}{p_n}$ est de même nature que le produit infini $\prod\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = \prod \frac{p_n - 1}{p_n}$.
 Or, d'après 5.b, $\frac{1}{\prod_N} = \prod_{n=1}^N \frac{p_n}{p_n - 1} = \prod_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k}\right) \geq \prod_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^M \frac{1}{p_n^k}\right) = S_{N,M}$ pour tout entier M .
 Or $S_{N,M}$ est clairement la somme des inverses des entiers dont la décomposition en facteurs premiers fait intervenir uniquement les N premiers nombres premiers et en outre à une puissance inférieure ou égale à M .
 En faisant tendre M vers $+\infty$, il vient que \prod_N est supérieur ou égal à la somme des inverses des entiers dont la décomposition ne fait intervenir que les N premiers nombres premiers. Donc a fortiori $\frac{1}{\prod_N} \geq \sum_{k=1}^{p_N} \frac{1}{k}$ et comme $p_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ et que la série harmonique diverge, il vient que $\frac{1}{\prod_N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi $\prod_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ i.e. le produit infini diverge. Donc :

La série des inverses des nombres premiers diverge. \square

Développement eulérien du sinus et formule de Wallis.

6. Commençons par remarquer que comme $\cos(-\alpha\pi) = \cos(\alpha\pi)$ la définition de f_α par sa restriction à $[-\pi, \pi]$ fermé et par 2π -périodicité a bien un sens.

f_α est clairement continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} (discontinuités de première espèce de f'_α en les multiples de π). Donc la série de Fourier de f_α converge normalement sur \mathbb{R} vers f_α .

Comme f_α est clairement paire, tous les b_n sont nuls et il vient pour tout entier n :

$$a_n = 2 < f_\alpha(t), \cos(nt) > = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f_\alpha(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha t) \cos(nt) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\alpha + n)t + \cos((\alpha - n)t)) dt = \frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha + n} + \frac{1}{\alpha - n} \right)}_{\text{car } \alpha \notin \mathbb{Z}} = (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

$$\text{Ainsi } f_\alpha(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nt)}{\alpha^2 - n^2} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha \notin \mathbb{Z} \quad (1). \quad \square$$

REMARQUE : on retrouve bien la convergence normale de la série ed Fourier sur \mathbb{R} .

$$\text{En appliquant (1) en } t = \pi \text{ en particulier, on obtient } \cotan(\pi\alpha) = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \quad \forall \alpha \notin \mathbb{Z} \quad (2). \quad \square$$

7. a. Comme $x \in]0, \pi[$, g est continue sur $]0, x[$ et au voisinage de 0 on a :

$$\cotan t = \frac{1 + O(t^2)}{t + O(t^3)} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1 + O(t^2)}{1 + O(t^2)} = \frac{1}{t} \cdot (1 + O(t^2))(1 + O(t^2)) = \frac{1}{t} \cdot (1 + O(t^2)) = \frac{1}{t} + O(t)$$

ce qui prouve que g est bien continue sur $[0, x]$. \square

$$\text{Comme } x \in]0, \pi[\text{ on a } \int_\varepsilon^x g(t) dt = \ln(\sin x) - \ln(x) - (\ln(\sin \varepsilon) - \ln \varepsilon).$$

$$\text{Or } \ln(\sin \varepsilon) - \ln \varepsilon = \ln \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \text{ Donc } \int_0^x g(t) dt = \ln \frac{\sin x}{x}. \quad \square$$

7. b. Pour $0 < t \leq x < \pi$ on peut écrire $t = \alpha\pi$ avec $\alpha = \frac{t}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ et la formule (2) fournit alors :

$$\cotan t = \frac{1}{t} + \frac{2t}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{t^2}{\pi^2} - n^2} \text{ soit } g(t) = 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}. \text{ En } t = 0 \text{ la série converge (Riemann) donc le membre}$$

de droite a un sens et vaut $0 = g(0)$. Ainsi l'égalité est encore vraie en $t = 0$.

$$\text{En conclusion } g(t) = 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2} \quad \forall t \in [0, x] \quad (3). \quad \square$$

7. c. Posons $u_n(x) = 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}$ pour $x \in]0, \pi[$. On sait par la question 4.b que le produit infini $\prod u_n(x)$ converge et

$$\text{d'après la remarque de la question 3a, comme } u_n(x) > 0, \text{ on a } \ln \prod_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln u_n(x).$$

$$\text{Il suffit donc de prouver que } \sum_{n=1}^{+\infty} \ln u_n(x) = \ln \frac{\sin x}{x} \text{ pour conclure i.e. } \sum_{n=1}^{+\infty} \ln u_n(x) = \int_0^x g(t) dt \text{ d'après 7.a.}$$

Or pour $t \in [0, x]$ on a $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ et cette série converge normalement sur $[0, x]$ car :

$$\left| \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \right| = \frac{2t}{n^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{2\pi}{n^2\pi^2 - \pi^2} = \frac{2}{(n^2 - 1)\pi} \text{ pour } n \geq 2.$$

$$\text{On peut donc intégrer terme à terme et } \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln |t^2 - n^2\pi^2| \right]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln u_n(x).$$

$$\text{Ainsi } \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right) = \frac{\sin x}{x} \quad \forall x \in]0, \pi[. \quad \square$$

On en déduit $\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$ pour $x \in]0, \pi[$. Cette égalité est encore clairement vraie en 0 (le produit

infini converge bien). Également sur $] - \pi, 0[$ par parité. Finalement $\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right) \quad \forall x \in] - \pi, \pi[. \quad \square$

8. En particulier pour $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) = \frac{2}{\pi}. \quad \square$

Formule de Weierstrass et constante d'Euler.

9. a. Notons $\varphi : (x, t) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ et $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x, t)$.

Pour tout réel x , la fonction φ_x est continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$ et intégrable en $+\infty$ car $\varphi_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Au voisinage de 0^+ on a $\varphi_x(t) \sim t^{x-1} > 0$ donc, par la règle des équivalents pour les intégrales de fonctions positives, φ_x est intégrable en 0^+ si et seulement si $x > 0$.

En conclusion le domaine de définition de la fonction Γ est $]0, +\infty[$. \square

9. b. $\Gamma(1) = 1$. \square

REMARQUE : par intégration par parties on obtient plus généralement $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n > 0$.

9. c Pour montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et dérivable sous le signe intégral, il suffit de prouver que :

1/ Pour tout $x > 0$ la fonction φ_x est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2/ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ est définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

3/ Pour tout $t > 0$ la fonction $x \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

4/ Pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

5/ La fonction $(x, t) \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ est localement dominée en x par une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$.

La première propriété a été établie en a. et les propriétés 2, 3 et 4 sont claires avec $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \ln t \times \varphi(x, t)$.

Soit désormais un segment $K = [a, b]$ quelconque inclus dans $]0, +\infty[$. Alors pour $(x, t) \in K \times]0, +\infty[$ on a $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi_K(t)$ avec $\psi_K(t) = \ln t \cdot e^{-t} \cdot t^{a-1}$ pour $t \in]0, 1]$ et $\psi_K(t) = \ln t \cdot e^{-t} \cdot t^{b-1}$ pour $t \geq 1$.

Cette fonction ψ_K est continue par morceaux (et même continue) et intégrable sur $]0, +\infty[$ car dominée par $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées et équivalente en 0^+ à $\ln t \cdot t^{a-1}$ de signe fixe (négatif) et intégrable en 0 car elle-même dominée par $\frac{1}{t^c}$ avec $1 - a < c < 1$. Ce qui prouve que la propriété 4 est satisfaite.

En conclusion Γ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $\Gamma'(t) = \int_0^{+\infty} \ln t \cdot e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$. \square

REMARQUE : par itération claire on prouve que γ est de classe \mathcal{C}^∞ et que $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n \cdot e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$.

10.a. Commençons par remarquer les fonction f_n sont continues sur $]0, +\infty[$.

On sait que par concavité de la fonction logarithme on a $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ donc que $\ln(1-y) \leq -y$ pour tout $y < 1$. Donc $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq e^{-t}$ pour $t \in]0, n[$ par croissance de la fonction exponentielle.

Cette inégalité est encore vraie pour $t = n$ car $0 \leq e^{-n}$.

Il en découle que $f_n(t) \leq e^{-t}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in]0, +\infty[$. \square

10.b. Remarquons que la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t}$ car, pour t fixé, on a $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ pour n assez grand (en fait $n > t$).

Il en découle que la suite (g_n) définie par $g_n(t) = f_n(t)t^{x-1}$ où x est un réel strictement positif fixé converge simplement sur \mathbb{R} vers $\varphi_x(t)$.

Ainsi la suite de fonctions $(g_n(t))$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction continue $\varphi_x(t)$. En outre cette suite est dominée par la fonction intégrable $\varphi_x(t)$ elle-même d'après le a. et le fait que $t^{x-1} > 0$. Le théorème de la convergence dominée prouve alors que :

$$\int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{x-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \Gamma(x) \quad \forall x > 0. \quad \square$$

11.a. Soit x fixé dans $]0, +\infty[$. La fonction $u \mapsto (1-u)^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et $u \mapsto u^{x-1}$ continue sur $]0, 1]$. On peut donc intégrer par parties sur $[\varepsilon, 1]$. Un calcul facile suivi d'un passage à la limite prouve alors que

$$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) \quad \forall x > 0 \quad \forall n \geq 1. \quad \square$$

11.b. Une itération évidente fournit alors $I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$. \square

11.c. Par changement de variable il vient $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{x-1} dt = n^x I_n(x)$. Il résulte alors des questions 10.b et 11.c

$$\text{que } \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \quad \forall x > 0. \quad \square$$

12.a. Soit x fixé dans $]0, 1[$. La formule de Gauss s'écrit aussi $\frac{1}{\Gamma(x)} = x \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

$$\text{Comme } 0 < x < 1 \text{ on a } 1 - x > 0 \text{ et donc } \frac{1}{\Gamma(1-x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n+1} (k-x)}{n! n^{1-x}} = (n+1-x) \cdot \frac{1}{n^{1-x}} \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

donc $\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1-x}{n} \times \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$. Comme $\frac{n+1-x}{n}$ tend vers 1, cela prouve la convergence du produit infini et que $\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \quad \forall x \in]0, 1[. \quad \square$

12.b. La formule de la question 7.c s'écrit également $\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \quad \forall x \in]-1, 1[$.

$$\text{D'où la formule des compléments } \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \forall x \in]0, 1[. \quad \square$$

12.c. Le \mathcal{C}^1 difféomorphisme $t \mapsto \sqrt{t} = u$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même montre que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Or la formule des compléments montre que } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \text{ Donc } \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \square$$

13.a. $u_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad \square$

13.b. $v_n = 1 - \sum_{k=2}^n u_k. \quad \square$

14. On a vu que $\frac{1}{\Gamma(x)} = x \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = x \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(x)$.

$$\text{Or } w_n(x) = e^{-x \ln n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{-x(1+1/2+\dots+1/n-v_n)} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{xv_n} \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}.$$

Par ailleurs on sait (question 4.c) que le produit infini $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}$ converge et que la suite (v_n) converge vers γ donc que $e^{-v_n x}$ tend vers $e^{\gamma x}$ par continuité de l'exponentielle. Il en résulte la formule de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k} \quad \forall x > 0. \quad \square$$

15.a. D'après la question 3 et sa remarque, la formule de Weierstrass permet d'écrire :

$$\ln(\Gamma(x)) = -\ln x - \gamma x - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right) = -\ln x - \gamma x - \sum_{k=1}^n u_n(x) = -\ln x - \gamma x - S(x) \quad (1).$$

Or les fonction $u_n(x)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, la série $\sum u_n(x)$ y converge simplement et la série dérivée $-\sum \frac{x}{k(k+x)}$ converge localement normalement sur $]0, +\infty[$ car $\left|\frac{x}{k(k+x)}\right| \leq \frac{b}{k(k+a)} \sim \frac{b}{k^2}$ pour tout $x \in [a, b]$ avec $0 < a < b$. Cela prouve que la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et qu'on peut dériver terme à terme de sorte que $S'(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)} \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

$$\text{Par ailleurs la fonction } \Gamma \text{ étant de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et à valeurs positives on a } \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x)) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

$$\text{En dérivant la relation (1) ci-dessus, il vient alors } \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)} \quad \forall x > 0. \quad \square$$

15.b. En particulier pour $x = 1$ on obtient $\Gamma'(1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

$$\text{Or } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ de sorte que par télescopage (en prenant une somme partielle) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \text{ et}$$

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt \text{ (Cf question 9.c). Donc } \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma. \quad \square$$

————— FIN —————