CONCOURS COMMUN INP 2022
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1- MP

m.laamoum@gmail.com

Je remercie infiniment Mr A. El Hammoudi qui a rédigé la partie informatique du Problème .

EXERCICE

Q1. $X \sim \mathcal{G}(p)$ $p \in]0,1[$, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p.q^{k-1}$ avec $q = 1 - p$.
Soit $t \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \mathbb{E}(t^X) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} t^k p.q^{k-1} \\ &= \frac{tp}{1 - qt} \end{aligned}$$

On a $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \dfrac{1}{p}$.

Q2. Le nombre de codes possible est 10^4 donc la probabilité de tomber sur le bon code est $\dfrac{1}{10^4}$

Q3. L'expérience est assimilée à un tirage sans remise . Le nombre maximal de tirages est 10^4 donc $X(\Omega) = [1, 10^4]$.
Soit A_k l'événement : " M. Toutlemonde obtient le bon code au k ieme essai " , on alors

$$[X = k] = \overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k \tag{1}$$

la formule des probabilités composées donne

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}\left(\overline{A_3}\right) ... \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{k-2}}}\left(\overline{A_{k-1}}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \tag{2}$$

et on a :

- $\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) = 1 - \frac{1}{10^4}$
- $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{i-1}}}\left(\overline{A_i}\right) = 1 - \frac{1}{10^4 - i + 1} = \frac{10^4 - i}{10^4 - i + 1}$ pour $2 \leq i \leq k - 1$.
- $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) = \frac{1}{10^4 - k + 1}$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{10^4 - 1}{10^4} \times \frac{10^4 - 2}{10^4 - 1} \times ... \times \frac{10^4 - k + 1}{10^4 - k + 2} \times \frac{1}{10^4 - k + 1} = \frac{1}{10^4}$$

X suit la loi uniforme sur $[1, 10^4]$ et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{10^4 + 1}{2}$.

Q4. L'expérience est assimilée à un tirage avec remise , donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On conserve les notations de Q3 , cette fois on a

- $\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) = 1 - \frac{1}{10^4}$
- $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{i-1}}}\left(\overline{A_i}\right) = 1 - \frac{1}{10^4}$ pour $2 \leq i \leq k - 1$.
- $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) = \frac{1}{10^4}$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{1}{10^4}.\left(1-\frac{1}{10^4}\right)^{k-1}$$

X suit une loi géometrique de paramètre $\dfrac{1}{10^4}$ et $\mathbb{E}(X)=10^4$.

Q5. *Informatique Pour Tous.*

```
code = 4714
n = int(input('Taper un code à 4 chiffres : '))
# La partie à compléter
k = 1
while n!=code :
    n = int(input('Taper un code à 4 chiffres : '))
    k += 1
# Fin de la partie
print('Vous avez trouvé le code en '+str(k)+' essais.')
```

Q6. *Informatique Pour Tous.*

```
def crypte(m):
    return [(x+5)%10 for x in m]
```

PROBLÈME - Intégrales de Fresnel

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Soit $H(x)=\displaystyle\int_0^x e^{it^2}dt$.

Q7. La fonction $f:t\mapsto e^{it^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc H l'est aussi et $H'(x)=e^{ix^2}$.

Q8. On a

$$\begin{array}{rcl} H(-x) & = & \displaystyle\int_0^{-x} e^{it^2}dt \\ & \underset{s=-t}{=} & -\displaystyle\int_0^{x} e^{is^2}ds \\ & = & -H(x) \end{array}$$

H est impaire

Q9. $t\mapsto e^t$ est développable en série entière au voisinage de 0 donc $t\mapsto e^{it^2}$ l'est aussi et

$$e^{it^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i)^n}{n!}t^{2n}\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$, sur le segment $[0,x]$ on peut intégrer , terme à terme, cette série entière , ce qui donne :

$$H(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i)^n}{n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$$

Q10. Si $x>0$, on fait le changement $u=t^2$, on obtient :

$$H(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du.$$

Q11. Soit $x > 4\pi^2$, on a :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\, du.$$

une intégration par par parties donne

$$\begin{aligned} H(x) - H(\sqrt{2\pi}) &= \left[-i\frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}}\right]_0^{x^2} + \frac{i}{2}\int_{2\pi}^{x^2} e^{iu}\frac{-1}{2u^{\frac{3}{2}}}\, du \\ &= -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du. \end{aligned}$$

Q12. On a $\left|\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ donc la fonction $u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[2\pi, +\infty[$, par conséquent l'intégrale $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du$ converge , de plus $\frac{e^{ix^2}}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, d'où la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$.

Q13. *Informatique Pour Tous.*

```
def I(f,a,b,n):
    h = (b-a)/n # le pas
    S = 0
    for i in range(n):
        S += f(a+i*h)  # xi = a+ih
    return S * h
```

Q14. I*nformatique Pour Tous.*

```
from math import exp, sqrt
def H(x,n):
    f = lambda u : exp(1j*u**2)/sqrt(u) # définition de la fonction f(u)
    return I(f,0,x**2,n) / 2
```

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Soit $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2 - i} dt$ et $f(x,t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2 - i}$.

Q15. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\left|e^{-x^2(t^2-i)}\right| = e^{-x^2t^2}$ et $\left|t^2 - i\right| = \sqrt{1+t^4}$.

Q16. Nous avons pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x,t)| = \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = \varphi(t)$$

$\varphi(t) \leq \frac{1}{t^2}$ donc elle est intégrable sur les intervalles $[1, +\infty[$ et sur $]-\infty, 1]$ ce qui prouve qu' elle est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite g est définie sur $\mathbb{R}$.
De plus $(x,t) \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est dominé par φ , qui est continue et intégrable, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

Q17. Soit $(x_n)_n$ une suite qui tend vers $+\infty$. Posons $f_n : t \mapsto f(x_n, t)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|f_n(t)| = \frac{e^{-x_n^2t^2}}{\sqrt{1+t^4}} \underset{+\infty}{\to} 0$ donc (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$ et elle est dominée par φ , qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de convergence dominée on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 0$.
La fonction g est paire donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(-x_n) = 0$.
D'après la caractérisation séquentielle de la limite on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

(Preuve : Si on suppose que g ne tend pas vers 0 en $+\infty$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $A > 0$ il existe $x > A$ et $|g(x)| > \varepsilon$. En particulier pour $A = n \in N$, il existe $x_n > n$ tel que $|g(x_n)| > \varepsilon$; absurde car $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = 0$).

Q18. On a f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}$, de plus $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2xe^{-x^2t^2}$.
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^{*+}$ on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2be^{-a^2t^2} = \psi(t)$. La fonction ψ est continue intégrable sur $\mathbb{R}$ donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Ceci est valable pou tout $[a,b] \subset \mathbb{R}^{*+}$ donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, par parité elle l'est sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ pour tout x dans $\mathbb{R}^*$.

Q19. Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2xe^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt \\ &\underset{u=tx}{=} -2e^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}dt \\ &= -2\sqrt{\pi}e^{ix^2} \end{aligned}$$

Q20. On a $X^2 - i = \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ qui donne

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}\left(\frac{1}{X-e^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{X+e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)$$

Soit $a > 0$, on écrit pour tout t :

$$\begin{aligned} t^2 - \sqrt{2}t + 1 &= \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \left(\sqrt{2}t - 1\right)^2\right) \end{aligned}$$

donc

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\,dt = \sqrt{2}\left[\arctan(\sqrt{2}t-1)\right]_{-a}^{a}$$

Par passage à la limite sur a on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}\,dt = \pi\sqrt{2}$$

Par le changement de variables $u = -t$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}\,dt = \pi\sqrt{2}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-i} \\ &= \tfrac{1-i}{4}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right) \end{aligned}$$

Par le changement de variables $u = -t$ on obtient $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}dt$ donc

$$g(0) = \tfrac{1-i}{4}\left(2i\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}$$

Q21. Soit $a, x > 0$, on a

$$g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$$

En déduire que :

$$g(x)-g(a)=-2\sqrt{\pi}\int_a^x e^{it^2}dt=-2\sqrt{\pi}\left(H(x)-H(a)\right)$$

par continuité de g et H en 0 et $H(0)=0$ on obtient

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & g(0)-2\sqrt{\pi}\times H(x) \\ & = & \dfrac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}-2\sqrt{\pi}\times H(x) \end{array}$$

On fait tendre x vers $+\infty$ on obtient

$$0=\lim_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}-2\sqrt{\pi}\times\lim_{x\to+\infty} H\left(x\right)$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt=\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Par suite

$$\int_0^{+\infty}\cos\left(t^2\right)dt\ =\int_0^{+\infty}\sin\left(t^2\right)dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Partie III - Étude d'une série de fonctions

Soit $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ et $f_n(x)=\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

Q22. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. et $M\geq 0$ tel que $|b_n|\leq M\quad\forall n\in\mathbb{N}$. Soit $N\in\mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\left(b_n-b_{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(a_n-a_{n+1}\right)b_n+a_{N+1}b_N-a_1b_0$$

Nous avons $a_{N+1}b_N-a_1 \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} a_1b_0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}\quad\left|\left(a_n-a_{n+1}\right)b_n\right|\leq M\left(a_n-a_{n+1}\right)$ et

$$\sum_{n=1}^{N}\left(a_n-a_{n+1}\right)=a_1-a_{N+1}\underset{n\to+\infty}{\rightarrow} a_1$$

la série $\sum\left(a_n-a_{n+1}\right)$ converge ce qui entraîne la convergence absolue de la série $\sum\left(a_n-a_{n+1}\right)b_n$.
Ce qui démontre la convergence de la série $\sum a_n\left(b_n-b_{n-1}\right)$.

Q23. Soient $x\in\,]0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx} & = & e^{ix}\dfrac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} \\ & = & e^{ix}\dfrac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\dfrac{e^{\frac{inx}{2}}-e^{\frac{-inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{\frac{-ix}{2}}} \\ & = & e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{array}$$

Q24. $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ et $f_n(x)=\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

Posons pour $n\geq 1$, $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}$, on a $f_n(x)=a_n\left(b_n-b_{n-1}\right)$.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et

$$|b_n|\leq\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ n'est pas bornée sur $]0,2\pi[$. Fixons x dans $]0,2\pi[$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que , $x \in]\varepsilon, 2\pi-\varepsilon[\subset]0,2\pi[$. On a alors $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, par suite $|b_n| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée , d'après Q23 la série $\sum f_n(x)$ converge , ainsi la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,2\pi[$, ce qui prouve que S est définie sur $]0,2\pi[$.

Q25. On a si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\ dt\right| \leq \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}.$$

donc pour tout $N > 0$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_1^{N+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\ dt\right| \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}. \quad (*)$$

La série $\sum \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$ converge et $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}} \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}} = C$. Remarquons que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{i(k+1)x}}{ix\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} \\ &= \frac{e^{ix}-1}{ix} \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}\end{aligned}$$

Par passage à la limite sur N dans la relation (*) on obtient :

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt\right| \leq C \quad \text{pour tout } x \in]0,2\pi[$$

Q26. Par le changement de variable $u = tx$ on obtient :

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

Nous avons $H(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\ du. = \int_0^x e^{it^2} dt$ donc

$$I(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 2\int_0^{+\infty} e^{it^2} du = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

Q27. On a

$$\frac{e^{ix}-1}{ix} = \frac{\sin x}{x} - i\frac{\cos x - 1}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} 1$$

De la question Q25 on a

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix} \sqrt{x} S(x) - I(x)\right| \leq \sqrt{x} C \quad \text{pour tout } x \in]0,2\pi[$$

donc

$$\frac{e^{ix}-1}{ix} \sqrt{x} S(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

ce qui donne

$$\sqrt{x} S(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

et

$$S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$$

FIN