

CENTRALE TSI 2011 – MATH 1 – CORRIGÉ

I - Existence et unicité de la solution du système (1)

I.A- *Unicité*

I.A.1) .

- a) I est un intervalle contenant \mathbb{R}_+ . S'il contient x , il contient tous les $y \geq x$ et donc $x + n$ où $n \geq 0$.
b) Par récurrence en utilisant : $f(x + n) + f(x + n + 1) = \varphi(x + n) = g(x + n) + g(x + n + 1)$.

I.A.2) En passant la relation précédente à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient : $f(x) = g(x) + 0$

I.B- *Existence*

I.B.1) On applique le CSSA : la suite $(\varphi(x + k))_k$ converge vers 0 en décroissant donc la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \varphi(x + k)$ converge.

I.B.2) .

a)
$$f(x + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varphi(x + 1 + k) = - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \varphi(x + (k + 1)) = -(f(x) - \varphi(x))$$

- b) $f(x) - \varphi(x)$ est le reste d'ordre 1 de la série. D'après CSSA, ce reste a le signe de $(-1)^1$ et est majoré en valeur absolue par $u_1 = \varphi(x + 1)$.
c) Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et donc que f est solution du système (1).

II - Premier exemple

II.A- *Étude d'une application linéaire*

II.A.1) La linéarité de θ provient de celle de la substitution $X := X + 1$.

II.A.2) Si $P = aX^n + \dots$, alors $\theta(P) = \frac{1}{e}(a(X + 1)^n + \dots) + aX^n + \dots = \left(\frac{1}{e} + 1\right)aX^n + \dots$ et $\frac{1}{e} + 1 \neq 0$.

II.A.3) Si $\theta(P) = 0$ alors $P = 0$ d'après ce qui précède, et donc θ est injective.

II.A.4) D'après II.A.2), $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par θ et donc θ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.A.5) $\ker \theta_n = \ker \theta \cap \mathbb{R}_n[X] = \{0\}$ donc θ_n est injectif.

Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, θ_n est un isomorphisme.

II.A.6) θ_n étant surjectif, $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \theta_n(P) = Q$.

II.A.7) Soit $P = \theta_n^{-1}(Q)$. Pour $f(x) = P(x) \exp(-x)$, on a bien : $f(x+1) + f(x) = \left(\frac{1}{e}P(x+1) + P(x)\right) \exp(-x) = Q(x) \exp(-x)$.

De plus, par le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \exp(-x) = 0$.

II.B- *Exemple*

II.B.1) .

- a) En dérivant la relation $X^n = \frac{1}{e}P_n(X+1) + P_n(X)$, on obtient $nX^{n-1} = \frac{1}{e}P'_n(X+1) + P'_n(X) = \theta_n(P'_n)$.
Ainsi, $\theta_n(P'_n) = n\theta_n(P_{n-1}) = \theta_n(nP_{n-1})$ et comme θ_n est injective, $P'_n = nP_{n-1}$.
b) Par une récurrence facile, $P_n^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)P_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$.

II.B.2) La formule de Taylor pour les polynômes appliquée à P_n entre X et $X + 1$ fournit : $P_n(X + 1) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(X)}{k!} (X + 1 - X)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} P_{n-k}(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X)$.

II.B.3) On a : $P_n(X+1) = eX^n - eP_n(X)$ donc $eX^n - eP_n(X) = P_n(X) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X)$ et $P_n(X) = \frac{1}{e+1} \left(eX^n - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X) \right)$.

II.B.4) $P(0, x) := e/(e+1)$;
 Pour k variant de 1 à n , faire
 $P := P(0, x)$
 Pour i variant de 1 à $k-1$, faire :
 $P := P + \text{binomial}(k, i) * P(k-i, x)$
 $P(k, x) := (e * x^n - P) / (e+1)$

III - Deuxième exemple

III.A- Écriture intégrale de la solution

III.A.1) $t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]0, 1]$;

En 0 : $0 \leq \frac{t^x}{1+t} \sim \frac{1}{t^{-x}}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ (exemple de Riemann avec $-x < 1$).

III.A.2) $f(x+1) + f(x) = \int_0^1 \frac{t^x(t+1)}{1+t} dt = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.

III.A.3) $\forall t \in [0, 1], 0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x$ qui s'intègre sur $[0, 1]$ en : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$.

III.A.4) On déduit de la question précédente avec le théorème des gendarmes que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et avec la question III.A.2) que f est la solution du système (1).

III.B- Calcul de quelques valeurs et équivalents

III.B.1) C'est la question I.B.2).

III.B.2) Pour $x = 0$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

III.B.3) D'après III.B.1), $f(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n+k+1} \stackrel{k:=k+n+1}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k}$

III.B.4) .

a) CSSA encore une fois : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$ est le reste d'ordre N de la série alternée : $|R_N(x)| \leq u_{N+1} = \frac{1}{x+N+2}$.

b) $\frac{1}{x+N+2} \leq \varepsilon \iff N \geq \frac{1}{\varepsilon} - x - 2$

$f(x) := -1/(x+1)$;

Pour k variant de 1 à $E(1/\text{epsilon}-x-2)$, faire :

$f(x) := f(x) + (-1)^k / (x+k+1)$

c) $0, 2 \leq f(1, 5) \leq 0, 3$.

III.B.5) Pour $x \leq y, \forall t \in [0, 1], \frac{t^x}{1+t} \geq \frac{t^y}{1+t}$ ce qui fournit en intégrant cette inégalité sur $[0, 1]$ et en utilisant l'expression intégrale de f : $f(x) \geq f(y)$.

III.B.6) f étant décroissante, on déduit que $2f(x+1) \leq f(x+1) + f(x) \leq 2f(x)$. Or $f(x) + f(x+1) = \varphi(x) = \frac{1}{x+1}$. Donc $f(x) \geq \frac{1}{2(x+1)}$ et $f(x+1) \leq \frac{1}{2(x+1)}$, soit encore $f(x) \leq \frac{1}{2x}$.

III.B.7) On a : $\frac{2x}{2x+2} \leq 2xf(x) \leq 1$ donc (gendarmes) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$. On en déduit que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

D'après III.B.3), $f(n) = (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ et d'après ce qui précède, $f(n) \sim \frac{1}{2n}$. On en déduit que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.$$

III.B.8) Reprenons : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n+1} f(n)$ et la suite $(f(n))$ décroît et converge vers 0. Donc (CSSA) cette série converge.

Question piège : on ne peut pas utiliser l'équivalent trouvé précédemment !

III.C- Étude de la fonction f

III.C.1) $\forall t \in [0, 1], x \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur I ;

HDL : Pour $[a, b] \subset]-1, +\infty[, \forall x \in [a, b], \left| \frac{t^x}{1+t} \right| \leq \frac{t^a}{1+t}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ (cf III.A.1) et III.B.5))

On en déduit avec le théorème de continuité sous le signe \int que f est continue sur I .

III.C.2) $f(x) = \varphi(x) - f(x+1)$. Or $\lim_{x \rightarrow -1} f(x+1) = f(0)$ (f continue en 0) donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ et $f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$.

III.C.3) .

a) $t \mapsto t^x (\ln t)^k$ est continue sur $]0, 1]$;

En 0 : $|t^x (\ln t)^k| = t^{\frac{x-1}{2}} \cdot \underbrace{t^{\frac{x+1}{2}} |\ln t|^k}_{\rightarrow 0 \text{ car } \frac{x+1}{2} > 0} = o\left(\frac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}\right)$: intégrable sur $]0, 1]$ par comparaison à l'exemple

de Riemann $\left(\frac{1-x}{2} < 1\right)$.

b) IPP : $\begin{cases} u = (\ln t)^k, & u' = \frac{k}{t} (\ln t)^{k-1} \\ v' = t^x, & v = \frac{1}{x+1} t^{x+1} \end{cases} : \int_{\varepsilon}^1 t^x (\ln t)^k dt = \left[\frac{1}{x+1} t^{x+1} (\ln t)^k \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{k}{x+1} \int_{\varepsilon}^1 t^x (\ln t)^{k-1} dt$

donc $(\varepsilon \rightarrow 0) I_k(x) = -\frac{k}{x+1} I_{k-1}(x)$.

On en déduit que $I_k(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^k} I_0(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$

III.C.4) .

a) $\varphi_k(\cdot, x)$ est continue sur $]0, 1]$;

En 0 : $|\varphi_k(t, x)| \sim t^x |\ln t|^k$ intégrable sur $]0, 1]$ (cf III.C.3) a))

Par comparaison, φ_k est intégrable sur $]0, 1]$.

b) Notons $\psi : (t, x) \mapsto \frac{t^x}{1+t}$. $\psi(t, \cdot)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I et $\frac{\partial^k \psi}{\partial x^k} = \varphi_k$: intégrable sur $]0, 1]$.

HDL : Pour $[a, b] \subset]-1, +\infty[, \forall x \in [a, b], |\varphi_k(t, x)| \leq |\varphi_k(t, a)|$ qui est intégrable sur $]0, 1]$

On en déduit avec le théorème de dérivation sous le signe \int que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x dt$$

III.C.5) .

a) Puisque $\ln \leq 0$ sur $]0, 1]$, $|f^{(k)}(x)| = \int_0^1 \frac{|\ln t|^k}{1+t} t^x dt \leq \int_0^1 |\ln t|^k t^x dt = |I_k(x)| = \frac{k!}{(1+x)^{k+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

b) Notons que $f^{(k)}$ vérifie le système (1_k) :
$$\begin{cases} \forall x \in I, & f^{(k)}(x+1) + f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x) = 0 \end{cases}$$

Notons $g : x \mapsto (-1)^k k! \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+j+1)^{k+1}}$. g vérifie le système (1_k) , en effet :

$$g(x) + g(x+1) = (-1)^k k! \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+j+1)^{k+1}} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+1+j+1)^{k+1}} \right) = (-1)^k k! \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+j+1)^{k+1}} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+j+1)^{k+1}} \right) = (-1)^k k! \frac{1}{(x+1)^{k+1}}$$

D'autre part, encore par le CSSA, $|g(x)| \leq \frac{k!}{(x+1)^{k+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

D'après l'unicité vue en I.A.2), $f = g$.

III.C.6) .

a) h étant paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$,

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

h est clairement de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et continue donc, d'après le théorème de Dirichlet, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) \text{ est la somme de sa série de Fourier en } x : h(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

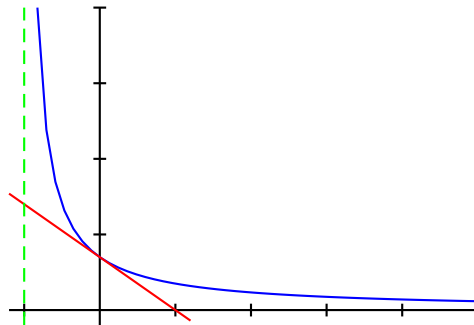
b) On applique la formule précédente en $x = 0$.

c) D'après III.C.5)b), $f'(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = S$

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = S_p - S_i. \quad \text{Notons } T = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = S_p + S_i. \quad \text{On a } S_p = \frac{1}{4}T \text{ donc } S_p = \frac{1}{3}S_i.$$

$$\text{On en déduit que } S = \left(\frac{1}{3} - 1\right) S_i = -\frac{2}{3} \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12} = f'(0).$$

III.C.7) .



III.C.8) .

a) D'après III.C.4)b), $f^{(n)}(0) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{1+t} dt$. Puisque $\ln \leq 0$ sur $]0, 1]$, $|f^{(n)}(0)| = \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{1+t} dt$. On en

$$\text{déduit que } \frac{1}{2} \int_0^1 |\ln t|^n dt \leq |f^{(n)}(0)| \leq \int_0^1 |\ln t|^n dt.$$

$$\text{Par ailleurs, } \int_0^1 |\ln t|^n dt = |I_n(0)| = n!$$

b) $\frac{1}{2} \leq \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq 1$ donc la suite $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^n \right)$ est bornée $\iff |r| \leq 1$.

Avec le lemme d'Abel, on en déduit que $R = 1$.