

Durin Jean Pierre
6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.
Tél: 03.85.59.16.48.

Contrôle à posteriori de l'épreuve
Banque PT: MATHS I-A.

Partie 1

Question 1.

a) Soit la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$. Pour $z = 1$, la série est divergente sans être grossièrement

divergente. 1 appartient donc au cercle de convergence. Donc $R = 1$.

On aurait pu dire également qu'en $z = -1$, la série était convergente sans être absolument convergente et conclure de la même façon.

Bien sûr on pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert!

b) Déjà évoqué à la question précédente:

Divergence en $z = 1$ (série harmonique $\frac{1}{n}$).

Convergence en $z = -1$ (série harmonique alternée $\frac{(-1)^n}{n}$ vérifiant le critère des séries alternées)

Question 2.

a) Soit x réel, tel que $|x| < 1$. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ somme de la série géométrique de raison x . Rayon de convergence $R = 1$.

b) Comme $S(0) = 0$, $S(x) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$.

Question 3.

• Soit la série de terme général $u_p = -\frac{1}{2} \frac{1}{3p+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{3p+2} + \frac{1}{3p+3}$.

$$u_p = \frac{-(3p+2)(3p+3) - (3p+1)(3p+3) + 2(3p+1)(3p+2)}{2(3p+1)(3p+2)(3p+3)} = -\frac{9p+5}{2(3p+1)(3p+2)(3p+3)}$$

u_p est de signe constant négatif, $u_p \sim -\frac{1}{6p^2}$ quand $p \rightarrow +\infty$, le théorème sur les séries de signe

constant équivalentes s'applique, u_p est équivalente à une série de type Riemann convergente, elle est elle-même convergente.

- Soit la série de terme général $v_p = \frac{1}{3p+1} - \frac{1}{3p+2}$. $v_p = \frac{1}{(3p+1)(3p+2)}$ est de signe constant positif, $v_p \sim \frac{1}{9p^2}$. On conclut comme précédemment à la convergence de cette série.

- Soit $z = e^{2i\pi/3} = j$.

On a : $j^{3p+1} = j$, $j^{3p+2} = j^2 = \bar{j}$, $j^{3p+3} = 1$ soit encore

$$j^{3p+1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^{3p+2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^{3p+3} = 1.$$

Considérons alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{j^n}{n}$. Comme le terme général tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, il est légitime de faire une sommation par paquets de trois termes consécutifs. On ne modifie pas la nature de la série, ni sa somme en cas de convergence.

Soit donc $w_p = \frac{j^{3p+1}}{3p+1} + \frac{j^{3p+2}}{3p+2} + \frac{j^{3p+3}}{3p+3}$, $p \geq 0$.

$w_p = (-\frac{1}{2} \frac{1}{3p+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{3p+2} + \frac{1}{3p+3}) + i\frac{\sqrt{3}}{2} (\frac{1}{3p+1} - \frac{1}{3p+2}) = u_p + i\frac{\sqrt{3}}{2} v_p$ avec les notations précédentes.

La série de terme général w_p est donc convergente comme somme de deux séries convergentes.

conclusion: la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge pour $z = e^{2i\pi/3}$.

Question 4.

- a) Soit $\theta \in \mathbf{R}$; $e^{i\theta} \neq 1$ c'est à dire $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

$$\sum_{k=p}^q e^{ik\theta} = e^{ip\theta} (1 + e^{i\theta} + \dots + e^{i(q-p)\theta}) = e^{ip\theta} \frac{1 - e^{i(q-p+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \text{ expression que l'on transforme en}$$

$$\text{passant aux arcs moitié : } \sum_{k=p}^q e^{ik\theta} = e^{ip\theta} \frac{e^{\frac{i(q-p+1)\theta}{2}} - 2i \sin(\frac{q-p+1}{2}\theta)}{e^{\frac{i\theta}{2}} - 2i \sin \frac{\theta}{2}}.$$

$$\text{conclusion: } \sum_{k=p}^q e^{ik\theta} = e^{\frac{i(p+q)\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{q-p+1}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

- b) Pour $\theta \in \mathbf{R}$; $e^{i\theta} \neq 1$, θ fixé, alors $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ et **conclusion:** $\left| \sum_{k=p}^q e^{ik\theta} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}.$

- c) Soit z un complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Alors $\exists \theta \in \mathbf{R}$, $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$; $z = e^{i\theta}$.

- Posons $u_n = \frac{1}{n}$, u_n est le terme général d' une suite qui tend vers zéro telle que la série de terme général $\left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.
- Posons $v_n = z^n$, on a bien que $\left| \sum_{k=p}^q v_k \right| \leq M = \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}$.

Les hypothèses du théorème admis sont réunies, la série de terme général $\frac{z^n}{n}$ est convergente.

conclusion: la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge pour $z = e^{i\theta}$, $\theta \neq 0 \ (2\pi)$.

Partie 2

$$P = \{z \in \mathbf{C} ; \operatorname{Re}(z) > 0\} \quad F(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z).$$

Question 1.

Pour $z \in P$, $e^{F(z)} = e^{\ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z)} = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)} = z$.

Question 2.

Pour $z = x + iy$ $\begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$ on note $P(x, y) = \operatorname{Re}(F(z))$, $Q(x, y) = \operatorname{Im}(F(z))$.

a) $Q(x, y) = \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ car par définition $\operatorname{Arg}(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\frac{y}{x} = \tan(\operatorname{Arg}(z)). \quad \text{conclusion: } Q(x, y) = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{y}{x}\right).$$

b) $P(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ d' où :

$$\bullet \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]} = 0.$$

$$\bullet \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \left(-\frac{y}{x^2}\right) \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]} = 0.$$

conclusion: $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$.

$$c) \bullet \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

$$\bullet \Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

d) Le théorème de Green-Riemann dit, pour (γ) bord orienté d' un compact D , (compact à gauche)

$$\text{que } \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \text{ d' où ici:}$$

$$\bullet \int_{\gamma} P(x, y) dx - Q(x, y) dy = \iint_D \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.$$

$$\bullet \int_{\gamma} Q(x, y) dx + P(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.$$

Rq: On constate que l' orientation de (γ) n' a plus d' importance, puisque le résultat est nul.

Question 3.

a) Soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \leq 1$ et si $\rho = 1$, $\theta \neq 0 (2\pi)$.

Alors, $1 - z = (1 - \rho \cos \theta) - i\rho \sin \theta$.

$$Re(1 - z) = \begin{cases} 1 - \rho \cos \theta & \text{si } \rho < 1 \\ 1 - \cos \theta & \text{si } \rho = 1 \end{cases} \text{ de sorte que } Re(1 - z) > 0 \text{ dans}$$

tous les cas et par suite :

conclusion: $1 - z \in P$ dès que z est différent de 1 et de module ≤ 1 .

b) On admet, pour z ; $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$ que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -F(1 - z)$.

On a donc, en particulier pour $z = e^{i\theta}$ $\theta \in]0, 2\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{n} = -[\ln|1 - e^{i\theta}| + i \text{Arg}(1 - e^{i\theta})] \text{ d' où}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = -\text{Arg} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} (-2i \sin \frac{\theta}{2}) \right). \text{ Or } \frac{\theta}{2} \in]0, \pi[\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} > 0 \text{ et par suite } e^{i\frac{\theta}{2}} (-2i \sin \frac{\theta}{2})$$

a pour module $2 \sin \frac{\theta}{2}$ et pour argument possible $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$ qui appartient bien à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

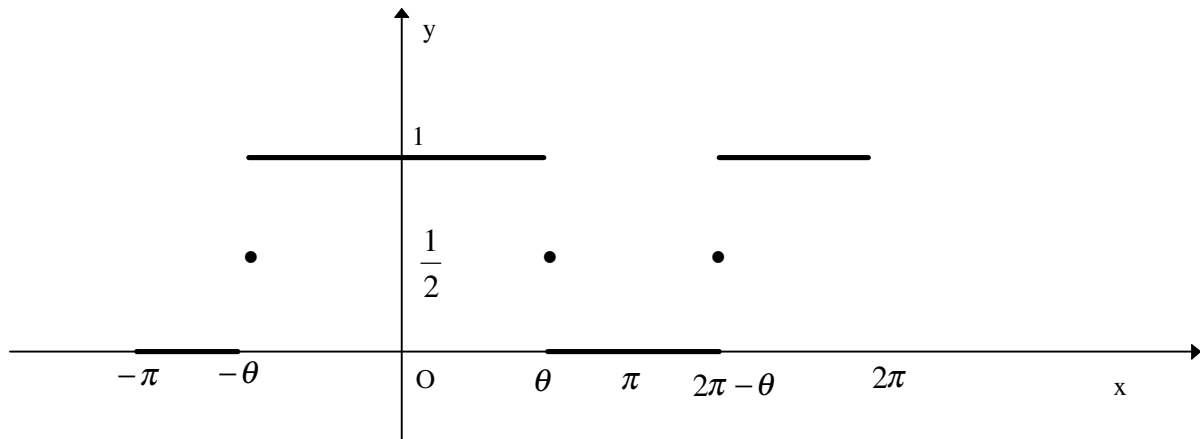
$$\text{On a donc } \text{Arg} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} (-2i \sin \frac{\theta}{2}) \right) = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{conclusion: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = -\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi - \theta}{2} \text{ pour } \theta \in]0, 2\pi[.$$

Partie 3

Soit $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

a) Soit f de période 2π , paire, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \theta[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \theta \\ 0 & \text{si } x \in]\theta, \pi] \end{cases}$



b) Coefficients de Fourier de f :

Les b_n sont nuls puisque f est paire.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \cos nx \, dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin n\theta}{n} & \text{pour } n \neq 0 \\ \frac{2}{\pi} \theta & \text{pour } n = 0 \end{cases}.$$

conclusion: La série de Fourier de f est : $\frac{\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \cos nx$.

c) La fonction f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$, donc vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet - Jordan. La série de Fourier de f converge en tout point et a pour somme

$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. Or on a en tout point de $\mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ de sorte que

conclusion: $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \cos nx$.

d) Pour $x = 0$ on obtient : $1 = \frac{\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ soit :

conclusion: Pour $\theta \in]0, \pi[$ $\frac{\pi - \theta}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$.

Maintenant, soit $\theta \in]\pi, 2\pi[$. Alors $-\theta \in]-2\pi, -\pi[$ et $2\pi - \theta \in]0, \pi[$. On peut donc appliquer la formule précédente en remplaçant θ par $2\pi - \theta$, d'où :

pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$, $\frac{\pi - (2\pi - \theta)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(2\pi - \theta)}{n}$ soit $\frac{\theta - \pi}{2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ et finalement :

conclusion: pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$, $\frac{\pi - \theta}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$.

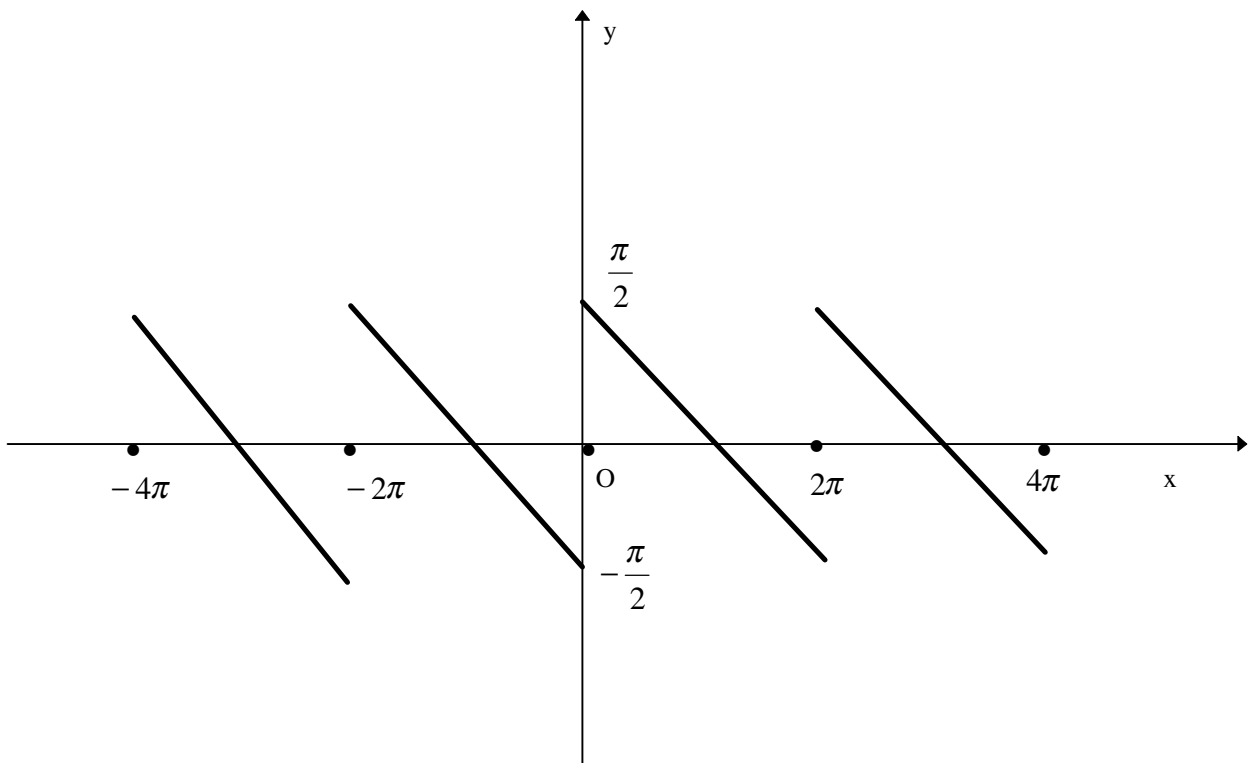
et puisque la formule est aussi vraie pour $\theta = \pi$, on a pour $\theta \in]0, 2\pi[$, $\frac{\pi - \theta}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$.

Partie 4

Soit g de période 2π , telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$ pour $x \in]0, 2\pi[$.

Question 1.

a)



b) Coefficients de Fourier de g :

Les a_n sont nuls puisque la fonction est impaire.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx \text{ que l'on intègre par parties } \begin{cases} u = \pi - x & u' = -1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{cases} \text{ d'où}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi-x}{n} \cos nx \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx = \frac{1}{n}.$$

conclusion: La série de Fourier de g est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Question 2.

a) La fonction g est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$, donc vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet - Jordan. La série de Fourier de g converge en tout point et a pour somme

$\frac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-))$. Or on a en tout point de $\mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-))$ de sorte que

$$\text{conclusion: } \forall x \in \mathbf{R}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Retenons en particulier que $\forall x \in]0, 2\pi[$, $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ et on retrouve le résultat de la partie 3.

b) • Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n}$. Or $\sin \frac{2p\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{(2p+1)\pi}{2} = (-1)^p$

$$\text{d'où conclusion: } \frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

• La formule de Parseval - Bessel donne : $2 \int_0^\pi \left(\frac{\pi-x}{2} \right)^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. D'où :

$$\text{conclusion: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{(\pi-x)^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6}.$$

Question 3.

a) $\sum_{k=1}^n \cos k\theta = \operatorname{Re} \left(e^{i \frac{n+1}{2}\theta} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$ d'après 1.4.a. d'où

$$\text{conclusion: } \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n+1}{2}\theta & \text{si } \theta \neq 0 \ (2\pi) \\ n & \text{si } \theta = 0 \ (2\pi) \end{cases}.$$

b) Pour x réel on pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$. On a $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx$ de sorte qu' on a pour

$$x \in]0, \pi[, S'_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{n+1}{2}x = \frac{1}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} .$$

Comme $S_n(0) = 0$, on peut écrire que pour $x \in]0, \pi[$, $S_n(x) = \int_0^x S'_n(t) dt$, d' où :

$$\text{conclusion: } \forall x \in]0, \pi[, S_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt .$$

Rq: La formule reste en fait valable pour $x \in]0, 2\pi[$.

c) Prolongement par continuité en 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$.

On a $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t} \sim \frac{\frac{t^3}{6}}{t^2} = \frac{t}{6}$ au voisinage de 0. On peut donc prologer par continuité par la valeur 0.

$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ étant continue par exemple sur $[0,1]$, est bornée sur ce segment. Notons M un

majorant de $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ sur $[0,1]$, on a alors : $0 \leq \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \leq M$ sur $[0,1]$.

• $\int_0^{h_n} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt \leq M h_n$ dès que $h_n \in [0,1]$ et par suite :

$$\text{conclusion: } \int_0^{h_n} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty .$$

• $\int_0^{h_n} \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} \right) dt = \int_0^{h_n} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2} \left[\frac{1}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] dt$ et par suite :

$$\left| \int_0^{h_n} \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} \right) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^{h_n} \left(\frac{1}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_0^{\frac{h_n}{2}} \left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u} \right) du \quad (u = \frac{t}{2})$$

$$\text{conclusion: } \int_0^{h_n} \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} \right) dt \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty .$$

d) Pour $x \in]0, \pi[$, $S'_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{n+1}{2}x$ et s' annule donc pour la première fois en

changeant de signe pour $\frac{n+1}{2}x = \frac{\pi}{2}$, soit en $x_n = \frac{\pi}{n+1}$.

x_n est > 0 et $\rightarrow 0$ qd $n \rightarrow +\infty$. On peut donc écrire:

$$S_n(x_n) = -\frac{x_n}{2} + \int_0^{x_n} \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin \frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} \right) dt + \int_0^{x_n} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt \text{ et on a donc :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{x_n} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt. \text{ Posons alors } u = (n+\frac{1}{2})t \quad dt = \frac{du}{n+\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{x_n} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt = \int_0^{(n+\frac{1}{2})x_n} \frac{\sin u}{u} \frac{du}{n+\frac{1}{2}} = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sin u}{u} du \text{ et enfin}$$

$$\text{conclusion: } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du = L.$$

e) $\frac{\sin u}{u}$ est développable en série entière sous la forme $\frac{\sin u}{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$ $R = \infty$.

On peut donc intégrer terme à terme entre 0 et π , et on obtient :

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Cette série vérifie le critère des séries alternées et la décroissance du module à bien lieu à partir de $n = 1$.

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(2n+1)\pi^2}{(2n+2)(2n+3)^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} < 1 \text{ pour } n \geq 1.$$

$$\text{Dès lors, on sait que } |R_n| \leq \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+3)}.$$

On propose pour valeur approchée de L la valeur $U_4 = \sum_{k=0}^4 \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}$. Cette valeur sera

à

coup sûr une valeur approchée de L avec une erreur $< 10^{-3}$, si on peut garantir que

$$\frac{\pi^{11}}{(11)!(11)} < 10^{-3}. \text{ Or en effet, en utilisant } \pi^2 < 10 \text{ on a :}$$

$$\frac{\pi^{11}}{(11)!(11)} < \frac{\pi 10^5}{(11)!(11)} < \frac{\pi 10^2}{9!} < \frac{\pi 10}{3.4.6.7.8.9} < \frac{32}{(4.8).3.6.7.9} = \frac{1}{1134}$$

$$\text{conclusion: } \text{on a bien } \frac{\pi^{11}}{(11)!(11)} < 10^{-3}.$$

