Correction de première épreuve de mathématiques
Mines-Ponts 2010
Proposée par M. Chehabi

A Prolongement harmonique.

1. On a f est continue sur le compact T donc elle est bornée sur T , alors il existe $M > 0$ tel que $\forall z \in T$, $|f(z)| \leq M$.

   On a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|c_n| \leq \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, dt = M$

   La série entière $\sum\limits_{n\geq 1} M \, z^n$ a pour rayon de convergence 1, donc les séries entières $\sum\limits_{n\geq 1} c_n \, z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} c_{-n} \, z^n$ sont de rayons supérieurs ou égales à 1, puis les séries $\sum\limits_{n\geq 1} c_n \, z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} c_{-n} \, \bar{z}^n$ sont convergentes sur D (car $|\bar{z}| = |z| < 1$).

2. $\forall (x, y) \in \widetilde{D}$, $\widetilde{S}(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$

   $\odot$ Soit $y \in]-1, 1[$ et $I_y = \left]-\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{1 - y^2}\right[$.

   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I_y$ $f_n(x) = a_n(x + iy)^n$. On a

   • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I_y et $\forall x \in I_y$, $\forall \, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n'(x) = n a_n (x + iy)^{n-1}$ et $f_0'(x) = 0$.

   • Pour tout $x \in I_y$, on a $|x + iy| < 1$ donc la série la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I_y.

   • Soit $\alpha \in I_y$ tel que $\alpha > 0$.

   $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left|n a_n (x + iy)^{n-1}\right| &\leq |n a_n| \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{n-1} \\ &\leq |n a_n| \left(\sqrt{\alpha^2 + y^2}\right)^{n-1} = \left|n a_n (\alpha + iy)^{n-1}\right| \end{aligned}$$

   On a $|\alpha + iy| = \sqrt{\alpha^2 + y^2} < 1$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} |n a_n (\alpha + iy)^{n-1}|$ converge , car une série entière et sa dérivée ont même rayon de convergence , puis la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment inclus dans I_y.

   D'après le théorème de dérivation terme à terme, l'application $x \longmapsto \widetilde{S}(x, y)$ est dérivable sur I_y et alors $\widetilde{S}$ admet une dérivée partielle par rapport à x sur $\widetilde{D}$ et $\forall (x, y) \in \widetilde{D}$

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}$$

.

$\odot$ Posons $\forall (x,y) \in \widetilde{D}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x,y) = na_n(x+iy)^{n-1}$. On a

• g_n est continue sur $\widetilde{D}$.

• Soit K un compact inclus dans $\widetilde{D}$. L'application $(x,y) \longmapsto x+iy$ est continue sur le compact K, donc bornée et atteint sa borne supérieure sur K , il existe alors $\beta \in]0,1[$ tel que : $\forall (x,y) \in K$, $|x+iy| \leq \beta$.
$\forall (x,y) \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|na_n(x+iy)^{n-1}| \leq |na_n|\,\beta^{n-1}$ et puisque la série $\sum\limits_{n\geq 1} |na_n|\,\beta^{n-1}$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans $\widetilde{D}$.

Ainsi $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}$ est continue sur $\widetilde{D}$.

3. On montre de même, que $\widetilde{S}$ admet une dérivée partielle par rapport à y qui est continue sur $\widetilde{D}$ et

$$\forall (x,y) \in \widetilde{D} \quad \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}(x,y) = i\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1} = i\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y).$$

On montre de la même façon que $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x \partial y}$ existent et sont continues sur $\widetilde{D}$, donc $\widetilde{S}$ est de classe C^2 sur $\widetilde{D}$ puis S est de classe C^2 sur D.
On a

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \quad \in \quad \widetilde{D} \quad \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x,y) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2} \\ \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}(x,y) \quad &= \quad -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2} = -\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x,y), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\Delta S(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

4. On a pour tout $z \in D \quad g_f(z) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n\ z^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\ \bar{z}^n$

D'après la question 3), l' application $S_1 : z \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n\ z^n$ est de classe C^2 sur D et pour tout $z \in D \quad \Delta S_1(z) = 0$.

Posons $S_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\ \bar{z}^n$ pour tout $z \in D$.

On a de la même façon que la question 3), $\widetilde{S_2}$ est de classe C^2 sur $\widetilde{D}$ et $\forall (x,y)\in\widetilde{D}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\widetilde{S_2}}{\partial x^2}(x,y) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x-iy)^{n-2} \\
\frac{\partial^2\widetilde{S_2}}{\partial y^2}(x,y) &= -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x-iy)^{n-2} = -\frac{\partial^2\widetilde{S_2}}{\partial x^2}(x,y),
\end{aligned}$$

donc pour tout $z\in D$, $\Delta S_2(z)=0$.

Puisque $\Delta(c_0)=0$ on a $\Delta(g_f)(z)=0$ pour tout $z\in D$.

5. On a pour tout $z\in D$ $g_f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt+\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(e^{-int}z^n+e^{int}\overline{z}^n\right)dt$

Soit $z\in D$, posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\forall t\in[-\pi,\pi]$ $g_n(t)=f(e^{it})\left(e^{-int}z^n+e^{int}\overline{z}^n\right)$. On a

• $\forall n\in\mathbb{N}^*$ g_n est continue sur $[-\pi,\pi]$.

• $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\forall t\in[-\pi,\pi]$ $|f(e^{it})\left(e^{-int}z^n+e^{int}\overline{z}^n\right)|\le 2M|z|^n=\alpha_n$ (M majorant de f sur T) et la série $\sum\limits_{n\ge1}\alpha_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\ge1}g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-\pi,\pi]$.

D'après le théorème " interversion $\sum$ et $\int$ " on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(e^{-int}z^n+e^{int}\overline{z}^n\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(e^{it})\left(e^{-int}z^n+e^{int}\overline{z}^n\right)\right)dt$$

puis

$$\begin{aligned}
g_f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(e^{it})\left(e^{-int}z^n+e^{int}\overline{z}^n\right)\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2f(e^{it})Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-int}z^n\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2f(e^{it})Re\left(\frac{e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})Re\left(1+2\frac{e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)dt
\end{aligned}$$

6. Soit $n\in\mathbb{N}$

• Si $f=p_n$, alors $\forall m\in\mathbb{Z}\backslash\{n\}$, $c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt=0$ et $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt=1$.

Donc $\forall z\in D$ $g_{p_n}(z)=z^n$.

• Si $f=q_n$ alors $\forall m\in\mathbb{Z}\backslash\{-n\}$, $c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+m)t}dt=0$ et $c_{-n}=1$.

Donc $\forall z \in D \quad g_{q_n}(z) = \bar{z}^n$.

Prenons f la fonction constante sur T qui vaut 1, on a $f = p_0$.

D'après la question 5) on a $\dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)dt = g_{p_0}(z) = 1$.

On a $\forall z \in D$, $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \dfrac{(e^{it}+z)(e^{-it}-\bar{z})}{|e^{it}-z|^2} = \dfrac{1-|z|^2+2i\ Im(ze^{-it})}{|e^{it}-z|^2}$ donc $Re\left(\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \dfrac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} \geq 0$ et alors $P_z(t) \geq 0$.

7. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T.
   - $\forall z \in T,\ \ |G_{f_n}(z) - G_f(z)| = |f_n(z) - f(z)| \leq \sup\limits_{z\in T} |f_n(z) - f(z)|$.
   - On a d'après la question 5), $\forall z \in D$,

$$\begin{aligned}
|G_{f_n}(z) - G_f(z)| &= |g_{f_n}(z) - g_f(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f_n(e^{it}) - f(e^{it}))P_z(t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{z\in T} |f_n(z) - f(z)| \int_{-\pi}^{\pi} |P_z(t)|\, dt
\end{aligned}$$

Comme $\forall z \in D$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ P_z(t) \geq 0$, alors $\dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P_z(t)|\, dt = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)dt = 1$.

Ainsi, $\forall z \in D$, $\ |G_{f_n}(z) - G_f(z)| \leq \sup\limits_{z\in T} |f_n(z) - f(z)|$.

Enfin, $\sup\limits_{z\in\bar{D}} |G_{f_n}(z) - G_f(z)| \leq \sup\limits_{z\in T} |f_n(z) - f(z)|$ et donc la suite $(G_{f_n})_n$ converge uniformément vers G_f sur $\bar{D}$.

8. Soit $g \in \mathcal{C}(T)$. Considérons $h(t) = g(e^{it})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a h est continue et 2π périodique sur $\mathbb{R}$, donc d'après le deuxième théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$.

   On a $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe $m_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n(t) = \sum\limits_{k=-m_n}^{m_n} \alpha_k e^{ikt}$ donc $P_n(t) = Q_n(e^{it})$ où $Q_n(z) = \sum\limits_{k=-m_n}^{m_n} \alpha_k z^k$.

   On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{P}(T)$ et $\sup\limits_{z\in T} |Q_n(z) - g(z)| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |Q_n(e^{it}) - g(e^{it})| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |P_n(t) - h(t)|$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |P_n(t) - h(t)| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la suite $(Q_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(T)$ converge uniformément vers g sur T .

   On a $f \in \mathcal{C}(T)$ donc il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T .

   On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ f_n \in \mathcal{P}(T)$ donc il existe $m_n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_k)_{0\leq k\leq m_n}$ et $(\mu_k)_{0\leq k\leq m_n}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ tels que $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{m_n} \lambda_k z^k + \sum\limits_{k=0}^{m_n} \mu_k \bar{z}^k$ pour tout $z \in T$.

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k p_k + \sum_{k=0}^{m_n} \mu_k q_k$, donc d'après la question 5)

$g_{f_n} = \sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k g_{p_k} + \sum_{k=0}^{m_n} \mu_k g_{q_k}$ et d'après la question 6),

$\forall z \in D,\ g_{f_n}(z) = \sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k z^k + \sum_{k=0}^{m_n} \mu_k \bar{z}^k$.

Donc $\forall z \in \bar{D},\ G_{f_n}(z) = \sum_{k=0}^{m_n} \lambda_k z^k + \sum_{k=0}^{m_n} \mu_k \bar{z}^k$ et alors G_{f_n} est continue sur $\bar{D}$. D'après la question 7) on a la suite $(G_{f_n})_n$ converge uniformément vers G_f sur $\bar{D}$, donc leur limite G_f est continue sur $\bar{D}$.

9. Soit $\varepsilon > 0$ et $u : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(z) = G(z) + \varepsilon \mid z|^2$.

   On a $\forall (x,y) \in \widetilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+iy \in D\},\ \widetilde{u}(x,y) = \widetilde{G}(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2)$.

   Posons $v(x+iy) = \varepsilon(x^2+y^2)$ pour tout $(x,y) \in \widetilde{D}$, on a

   $\Delta v(x+iy) = \frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial y^2}(x,y) = 4\varepsilon$

   D'après la propriété (a_3), $\widetilde{G}$ est de classe C^2 sur $\widetilde{D}$ et $\Delta G(z) = 0$ pour tout $z \in D$, donc $\widetilde{u}$ est de classe C^2 sur $\widetilde{D}$ puis u est de classe C^2 sur D et pour tout $z \in D$ $\Delta u(z) = \Delta G(z) + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0$.

   On a d'après la propriété (a_2), G est continue sur $\bar{D}$ et puisque G est à valeurs réelles alors u est à valeurs réelles et continue sur le compact $\bar{D}$ donc u est bornée et atteint sa borne supérieure sur $\bar{D}$. Il existe $z_0 \in \bar{D}$ tel que $u(z_0) = \max_{z\in\bar{D}} u(z)$.

   Montrons que $z_0 \in T$.

   Raisonnons par absurde et supposons que $z_0 \in D$

   Posons $z_0 = x_0+iy_0$, il existe $\alpha > 0, \beta > 0$ tel que $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\times]y_0-\beta, y_0+\beta[\subset D$.

   La fonction $g : x \longmapsto u(x+iy)$ est de classe C^2 sur $I =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ et admet un maximum local en x_0 donc $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(x_0,y_0) = g'(x_0) = 0$.

   Au voisinage de x_0, $g(x) = g(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 g''(x_0) + o((x-x_0)^2)$ donc $g''(x_0)$ est de signe de $g(x) - g(x_0) \leq 0$ et alors $g''(x_0) \leq 0$ ce qui entraine que $\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}(x_0,y_0) \leq 0$.

   On obtient en interverssant les variables que $\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2}(x_0,y_0) \leq 0$, ce qui contredit $\Delta u(z_0) > 0$. Ainsi $z_0 \in T$.

   On a $f = 0$, donc d'après la propriété (a_1), $G(z_0) = f(z_0) = 0$

   puis $u(z_0) = \varepsilon \mid z_0|^2 = \varepsilon$ et par suite $\forall z \in \bar{D}\ \ u(z) \leq u(z_0) = \varepsilon$.

10. • Dans le cas particulier $f = 0$ et G est à valeurs réelles .

    On a $g_f = 0$ sur D , car $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = 0$. Donc $G_f = 0$ sur $\bar{D}$.

On a d'après la question 9), $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall z \in \bar{\bar{D}} \quad G(z)+\varepsilon \mid z|^2 \leq \varepsilon$, donc en particulier $\forall z \in D$, $G(z) \leq \varepsilon \left(1- \mid z|^2\right)$ et alors en tendant ε vers 0, on a $\forall z \in D$, $G(z) \leq 0$.

On a $-G$ vérifie les propiétés $(a_1),(a_2)$ et (a_3), donc en prenant $-G$ à la place de G on a $\forall z \in D$, $-G(z) \leq 0$.

Donc $\forall z \in D$, $G(z) = 0$.

D'autre part $\forall z \in T \quad G(z) = f(z) = 0$, donc $G = G_f$.

• Cas où $f = 0$ et G est à valeurs complexes .

Posons $G_1 = Re(G)$ et $G_2 = Im(G)$ on a $\forall z \in \bar{D} \quad G(z) = G_1(z) + iG_2(z)$.

Soit $i \in \{1, 2\}$, on a G_i vérifie les propriétés $(a_1),(a_2)$ et (a_3), donc d'après le cas précédent $G_i = 0$ puis $G = 0 = G_f$.

• Cas général : $f \in \mathcal{C}(T)$ et G est à valeurs complexes .

On a déja montré que G_f vérifie les propriétés $(a_1),(a_2)$ et (a_3), donc $G-G_f$ vérifient les propriétés (a_2) et (a_3) et vérifie (a_1) pour la fonction nulle.

On se trouve dans le cas précédent , donc $G - G_f = 0$ puis $G = G_f$.

B. Deux applications.

Première application : On considère la fonction G définie sur $\bar{D}$ par

$$G(x + iy) = e^x \cos y.$$

11. Il est clair que G est de classe C^2 sur D et $\forall (x, y) \in \widetilde{D}$

$\Delta G(x + iy) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$, donc G vérifie la condition (a_3).

On a G est continue sur $\bar{D}$, donc vérifie la propriété (a_2).

$\forall t \in \mathbb{R}$, $G(e^{it}) = e^{\cos t} \cos(\sin t)$, donc la restriction de G à T coincide avec l'application $f_0 \in \mathcal{C}(T)$, définie par $z \in T \ f_0(z) = e^{Re(z)} \cos(Im(z))$, (f_0 est à valeurs réelles)

puis G verifie la propriété (a_1).

Ainsi G vérifie les propiétés $(a_1),(a_2)$ et (a_3) et donc d'après la question 10) $G = G_{f_0}$ donc en particulier $\forall z = x + iy \in D$, $g_{f_0}(x + iy) = e^x \cos y$.

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) \cos(nt)dt = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{it}) \cos(nt)dt = Re(c_n)$.

On effectue le changement de variable $(u = -t)$ on a

$\forall\, n \in \mathbb{Z}, c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{it})e^{int}dt = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{-iu})e^{-inu}du = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{iu})e^{-inu}du = c_n$.

On a

$$\forall z = x+iy \in D, \quad e^x \cos y = g_{f_0}(x+iy) = c_0+\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\bar{z}^n = c_0+\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z^n+\bar{z}^n)$$

En particulier en prenant $y = 0$, on a $\forall x \in]-1,1[$, $e^x = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2c_n x^n$

Par suite $\forall x \in]-1,1[$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x = Re(c_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2Re(c_n)x^n$.

Par unicité du développement en série entère de la fonction nulle en zéro, on a $Re(c_0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $Re(c_n) = \frac{1}{n!}$.

Ainsi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos(nt)dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{|n!|} & \text{si } n \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

Deuxième application : $u : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.

12. • Supposons que u est de classe C^2 et que $\Delta u = 0$ sur U. Soit $\bar{\bar{D}}(a, R)$ un disque fermé contenu dans U.

    On a $\bar{\bar{D}}(a, R) = a + R\bar{\bar{D}}(0, 1) = a + R\bar{\bar{D}}$.

    Considérons $G(z) = u(a + Rz)$ pour tout $z \in \bar{\bar{D}}$.

    On a G est continue sur $\bar{D}$ donc elle vérifie la propriété (a_2) .

    Soit f_1 la restriction de G à T (d'où la propriété (a_1))

    $\forall (x, y) \in \tilde{D}$, $\tilde{G}(x, y) = u(a+Rx+iRy)$ donc G est de classe C^2 sur D et pour tout $z \in D$ $\Delta G(z) = 0$ d'où la propriété (a_2) .

    Ainsi G vérifie les propiétés (a_1), (a_2) et (a_3) et donc d'après la question 10), $G = G_{f_1}$ donc en particulier $\forall z \in D$, $g_{f_1}(z) = u(a + Rz)$.

    D'après la question 5) On a $\forall z \in D$, $g_{f_1}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(e^{it})P_z(t)dt$

    où $P_z(t) = Re\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

    Ainsi $\forall z \in D(a, R)$,

$$\begin{aligned} u(z) &= G\left(\frac{z-a}{R}\right) = g_{f_1}\left(\frac{z-a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt. \end{aligned}$$

    • Réciproquement, supposons que pour tout disque fermé $\bar{\bar{D}}(a, R)$ contenu dans U et pour tout $z \in D(a, R)$, on a $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + R\, e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt$.

    Considérons l'application $f : \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & u(a + Rz) \end{array}$. On a puisque u est continue sur $\bar{\bar{D}}(a, R)$ alors f est continue sur T.

D'après la partie $A)$, on a G_f vérifie les propiétés $(a_1),(a_2)$ et (a_3) et d'après la question 5)

$$\forall z \in D, \quad g_{_f}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)dt$$

Donc $z \in D(a,R)$, on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt. = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt = g_{_f}\left(\frac{z-a}{R}\right)$$

.

D'après la propriété (a_2), $g_{_f}$ est de classe C^2 sur D et pour tout $z' \in D$, $\Delta g_f(z') = 0$, donc u est de classe C^2 sur $D(a,R)$ et pour tout $z \in D(a,R)$, $\Delta u(z) = 0$.

Par suite u est de classe C^2 sur U et $\Delta u = 0$ sur U.

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 telle que $\Delta u_n = 0$ sur U. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u alors u est continue sur U.

Soit $\bar{\bar{D}}(a,R)$ un disque fermé contenu dans U , on a d'après la question 12) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in D(a,R)$,

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt$$

Soit $z \in D(a,R)$. On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n(z) = u(z)$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [-\pi,\pi]$, $f_n(t) = u_n(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)$. On a

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[-\pi,\pi]$.
- On a l'application $t \longmapsto P_{\frac{z-a}{R}}(t)$ est continue sur le compact $[-\pi,\pi]$, donc bornée

sur $[-\pi,\pi]$, alors il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall t \in [-\pi,\pi]$, $\left|P_{\frac{z-a}{R}}(t)\right| \leq M_0$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}\left|f_n(t) - u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\right| &= \left|u_n(a+Re^{it}) - u(a+Re^{it})\right|\left|P_{\frac{z-a}{R}}(t)\right| \\ &\leq M_0\left|u_n(a+Re^{it}) - u(a+Re^{it})\right| \\ &\leq M_0\sup_{z\in U}|u_n(z)-u(z)|\end{aligned}$$

Donc la suite $(f_n)_n$ convege uniformément sur $[-\pi,\pi]$ vers l'application
$t \longmapsto u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)$.

D'après le théorème "interversion limite et integrale sur un segment ", on a :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt$$

et d'après la question 12), on a u est de classe C^2 sur U et $\Delta u = 0$ sur U.

C. Propriétés duales.

14. On fixe $z \in D$ et on considère l'application

$$\varphi_z : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(T) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & g_f(z) \end{array}$$

• Soient $(f_1, f_2) \in (\mathcal{C}(T))^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a d'après la question 5)

$$\begin{aligned} \varphi_z(f_1 + \lambda f_2) &= g_{(f_1+\lambda f_2)}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_1 + \lambda f_2)(e^{it})P_z(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(e^{it})P_z(t)dt + \lambda\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(e^{it})P_z(t)dt = \varphi_z(f_1) + \lambda\varphi_z(f_2) \end{aligned}$$

donc φ_z est $\mathbb{C}-$ linéaire.

$\forall f \in \mathcal{C}(T)$, $|\varphi_z(f)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})P_z(t)|\,dt \leq \alpha N(f)$ où $\alpha = \int_{-\pi}^{\pi}|P_z(t)|\,dt$

Donc φ_z est linéaire et $\forall f \in \mathcal{C}(T)$, $|\varphi_z(f)| \leq \alpha N(f)$, donc φ_z est continue sur $\mathcal{C}(T)$ d'où la propriété (c_1).

• On a d'après la question 6) les propriétés (c_2) et (c_3) sont vérifiées

• $\forall f \in \mathcal{C}(T)$, $|\varphi_z(f)| \leq \alpha N(f)$ où $\alpha = \int_{-\pi}^{\pi}|P_z(t)|\,dt = 1$ (d'après la question 6)) d'où la propriété (c_4).

15. Soit $\varphi : \mathcal{C}(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie les conditions (c_1), (c_2) et (c_3).

On a d'après les conditions (c_2) et (c_3) , $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(p_n) = \varphi_z(p_n)$ et $\varphi(q_n) = \varphi_z(q_n)$ et d'après la $\mathbb{C}$ - linéarité de φ et de φ_z on a $\varphi = \varphi_z$ sur $\mathcal{P}(T)$, le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(T)$ engendré par $\{p_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{q_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $f \in \mathcal{C}(T)$, alors d'après la question 8) il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(f_n) = \varphi_z(f_n)$ et par continuité de φ et de φ_z on a $\varphi(f) = \varphi_z(f)$. Ainsi $\varphi = \varphi_z$.

16. On a $N(h)^2 = \sup\limits_{z\in T}((2f(z) - N(f))^2 + \lambda^2)$

D'autre part $\forall z \in T$, $|f(z)| \leq N(f)$ et puisque f est à valeurs réelles positives, alors $\forall z \in T$, $0 \leq f(z) \leq N(f)$ puis $-N(f) \leq 2f(z) - N(f) \leq N(f)$ et alors $(2f(z) - N(f))^2 \leq N(f)^2$.

On a f est continue sur le compact T donc il existe $z_0 \in T$ tel que $f(z_0) = N(f)$, puis $(2f(z_0) - N(f))^2 = N(f)^2$. Ainsi $N(h)^2 = N(f)^2 + \lambda^2$.

17. On a $h = 2f - N(f) + i\lambda$ donc puisque φ est $\mathbb{C}-$linéaire, alors

$\varphi(h) = 2\varphi(f) + \varphi(-N(f) + i\lambda) = 2\varphi(f) + (-N(f) + i\lambda)\varphi(p_0) = 2\varphi(f) - N(f) + i\lambda,$

car d'après (c_2) on a $\varphi(p_0) = 1$.

Posons $\varphi(f) = \alpha_f + i\beta_f$ où $(\alpha_f, \beta_f) \in \mathbb{R}^2$. On a $|\varphi(h)|^2 = (2\alpha_f - N(f))^2 + (2\beta_f + \lambda)^2$

On a d'après la propriété (c_4) et la question précédente

$|\varphi(h)|^2 \leq N(h)^2 = N(f)^2 + \lambda^2$, donc $(2\alpha_f - N(f))^2 + (2\beta_f + \lambda)^2 \leq N(f)^2 + \lambda^2$ et alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta_f \lambda + \beta_f^2 + \alpha_f^2 - \alpha_f N(f) \leq 0$, donc $\beta_f = 0$ (car sinon si $\beta_f > 0$ on obtient une absurdité en tendant λ vers $+\infty$ et si $\beta_f < 0$ on obtient une absurdité en tendant λ vers $-\infty$).et alors $\varphi(f) \in \mathbb{R}$ et $\alpha_f(\alpha_f - N(f)) \leq 0$.

On a d'après la propriété (c_4) et la question précédente $\alpha_f = \varphi(f) \leq N(f)$,

donc $\alpha_f - N(f) \leq 0$

- Si $\alpha_f - N(f) = 0$ alors $\alpha_f = N(f) \geq 0$.
- Sinon $\alpha_f - N(f) < 0$, alors de $\alpha_f(\alpha_f - N(f)) \leq 0$, on a $\alpha_f \geq 0$.

Ainsi $\varphi(f) \geq 0$.

18. Soit $f \in \mathcal{C}(T)$.

- Si f est à valeurs réelles, alors $f = f^+ - f^-$ où $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$.

Comme φ est $\mathbb{C}-$linéaire, alors $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f^+) - \varphi(f^-)$ et d'après la question 17) puisque f^+ et f^- sont dans $\mathcal{C}(T)$ à valeurs réelles positives , alors $\varphi(f^+) \in \mathbb{R}$ et $\varphi(f^-) \in \mathbb{R}$.

Donc $\overline{\varphi(f)} = \overline{\varphi(f^+) - \varphi(f^-)} = \varphi(f^+) - \varphi(f^-) = \varphi(\bar{f})$.

- Si f est à valeurs complexes, alors $f = Re(f) + iIm(f)$.

Comme φ est $\mathbb{C}-$linéaire, alors $\varphi(\bar{f}) = \varphi(Re(f)) - i\varphi(Im(f))$ et d'après le cas précédent , puisque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dans $\mathcal{C}(T)$ à valeurs réelles alors

$\varphi(Re(f)) \in \mathbb{R}$ et $\varphi(Im(f)) \in \mathbb{R}$.

Donc $\overline{\varphi(f)} = \overline{\varphi(Re(f)) + i\varphi(Im(f))} = \varphi(Re(f)) - i\varphi(Im(f)) = \varphi(\bar{f})$

Ainsi $\forall\ f \in \mathcal{C}(T)$, $\overline{\varphi(f)} = \varphi(\bar{f})$.

On a φ vérifie les conditions (c_1), (c_2) et (c_4) donc d'après la question 15) pour montrer que $\varphi = \varphi_z$ il suffit de montrer que φ vérifie la condition (c_3).

Soit $n \in \mathbb{N}$,

on a $\varphi(q_n) = \varphi(\bar{p_n}) = \overline{\varphi(p_n)} = \overline{z^n} = \bar{z}^n$, et donc φ vérifie la condition (c_3).

Ainsi $\varphi = \varphi_z$.