

1 Série de fonctions

I.1. I.1.1. Soit x réel, $|u_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2\pi^2}$ donc $|u_n(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, la série (numérique) de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. Ceci étant valable pour tout réel x :

la série (de fonctions) $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.

I.1.2. Soit $a > 0$: pour tout $x \in [-a, a]$, $|u_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2\pi^2} \leq \frac{2|a|}{n^2\pi^2}$ donc

$\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{2|a|}{\pi^2} \frac{1}{n^2}$ donc la série de terme général $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]}$ est convergente, c'est-à-dire :

pour tout $a > 0$, la série (de fonctions) $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

• Avec un peu d'habitude, on peut voir qu'en choisissant x_n du type $n\pi$ on obtiendra une série divergente... Par exemple, rédigeons avec $x_n = n$:

On a $|u_n(n)| = \frac{2}{(1+\pi^2)n} \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} |u_n(x)| = \|u_n\|_{\infty, \mathbf{R}}$ et puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors la série $\sum \|u_n\|_{\infty, \mathbf{R}}$ diverge aussi (par minoration).

• Méthode plus générale : calcul de $\sum \|u_n\|_{\infty, \mathbf{R}}$ par un tableau de variations :

$|u_n|$ est paire et pour $x \geq 0$, $|u_n(x)| = u_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$ que l'on peut dériver :

$$u'_n(x) = \frac{2(x^2 + n^2\pi^2) - 2x(2x)}{(x^2 + n^2\pi^2)^2} = \frac{n^2\pi^2 - x^2}{(x^2 + n^2\pi^2)^2},$$

x	0	$n\pi$	$+\infty$
$u'_n(x)$		+	−
$u_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$
		M_n	0

donc $\|u_n\|_{\infty, \mathbf{R}} = \|u_n\|_{\infty, \mathbf{R}^+} = M_n = u_n(n\pi) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{n}$, donc la série $\sum \|u_n\|_{\infty, \mathbf{R}}$ diverge :

I.1.3. Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbf{R}$ et pour $a > 0$, la série $\sum u_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-a, a]$ donc la somme U est continue sur $[-a, a]$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, U est continue sur $\mathbf{R}$.

I.2. I.2.1. D'après le théorème fondamental, la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n est :

$$x \mapsto \int_0^x u_n(t) dt = \int_0^x \frac{2t}{t^2 + n^2\pi^2} dt = \left[\ln(t^2 + n^2\pi^2) \right]_0^x = \ln(x^2 + n^2\pi^2) - \ln(n^2\pi^2) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Comme $x \mapsto \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \ln(x^2 + n^2\pi^2)$ alors la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n est $x \mapsto \ln(x^2 + \pi^2 n^2) - \ln(\pi^2 n^2) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

I.2.2. Soit x réel : $0 \leq v_n(x)$ et $v_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2\pi^2}$ donc $v_n(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc la série $\sum v_n(x)$ est convergente.

La série $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$

I.2.3. On vient de voir que $V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est définie sur $\mathbf{R}$. En particulier $V(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

Soit $a > 0$, on a vu que la série $\sum v'_n = \sum u_n$ convergait normalement sur $[-a, a]$ donc V est dérivable sur $[-a, a]$.

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, V est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, V'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = U(x).$$

V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U .

I.3. Soit $x \in \mathbf{R}$. $p_n(x) = x \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. Or

$$\ln \left(\prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right) \right) = \sum_{k=1}^{k=n} \ln \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right) = \sum_{k=1}^{k=n} v_k(x) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} V(x).$$

Par continuité de $\exp$ on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right) = \exp(V(x))$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = x e^{V(x)}$.

La suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$, et pour $x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = x e^{V(x)} = x \exp \left(\int_0^x U(t) dt \right)$.

2 Série de Fourier

II.1. II.1.1. La fonction g_x est continue sur $] -\pi, \pi [$. Et $\lim_{\pi^-} g_x = g_x(\pi) = \text{ch} \left(\frac{x\pi}{\pi} \right) = \text{ch}(x)$.

De plus par périodicité $\lim_{\pi^+} g_x = \lim_{-\pi^+} g_x = \text{ch} \left(\frac{-x\pi}{\pi} \right) = \text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$.

Donc g_x est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$ donc le théorème de la convergence normale assure que g_x est égale en tout point $t \in \mathbf{R}$ à la somme de sa série de Fourier :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad g_x(t) = \frac{1}{2} a_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) \cos(nt) + b_n(x) \sin(nt))$$

II.1.2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction g_x est paire donc $b_n(x) = 0$.

II.1.3. $a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_x(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_x(t) \cos(nt) dt$ par parité.

Si $x = 0$: $a_0(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dt = 2$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi n} [\sin(nt)]_0^{\pi} = 0$.

Si $x \neq 0$, alors $a_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{ch} \left(\frac{xt}{\pi} \right) \cos(nt) dt$. On peut mener le calcul soit en introduisant des exponentielles (complexes pour $\cos$, réelles pour ch) soit une double intégration par parties ce qui, compte-tenu des bornes, me semble préférable :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} a_n(x) &= \left[\frac{\pi}{x} \text{sh} \left(\frac{xt}{\pi} \right) \cos(nt) \right]_0^{\pi} + n \frac{\pi}{x} \int_0^{\pi} \text{sh} \left(\frac{xt}{\pi} \right) \sin(nt) dt \\ \frac{\pi}{2} a_n(x) &= (-1)^n \frac{\pi}{x} \text{sh}(x) + n \frac{\pi}{x} \left[\frac{\pi}{x} \text{ch} \left(\frac{xt}{\pi} \right) \sin(nt) \right]_0^{\pi} - n^2 \frac{\pi^2}{x^2} \int_0^{\pi} \text{ch} \left(\frac{xt}{\pi} \right) \cos(nt) dt \\ \text{donc } \frac{\pi}{2} a_n(x) &= (-1)^n \frac{\pi}{x} \text{sh}(x) - n^2 \frac{\pi^2}{x^2} \frac{\pi}{2} a_n(x) \text{ puis} \end{aligned}$$

$$a_n(x) = (-1)^n \frac{2x}{x^2 + n^2 \pi^2} \text{sh}(x) = (-1)^n u_n(x) \text{sh}(x), \quad a_0(0) = \frac{\text{sh}(x)}{x}$$

II.2. II.2.1. D'après les résultats précédents, on a pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$g_x(t) = \frac{\text{sh}(x)}{x} + \text{sh}(x) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x) \cos(nt)$$

Pour $t = \pi$, $g_x(\pi) = \text{ch}(x)$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ donc $\text{ch}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x} + \text{sh}(x) \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ d'où :

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^*, \quad U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} - \frac{1}{x}.$$

II.2.2. $V(x) = \int_0^x U(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0} [\ln(\text{sh}(t)) - \ln(t)]_a^x = \ln \left(\frac{\text{sh}(x)}{x} \right) - \lim_{a \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\text{sh}(a)}{a} \right)$. Or $\text{sh}(a) \underset{a \rightarrow 0}{\sim} a$ donc

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(a)}{a} = 1 \text{ puis } \lim_{a \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\text{sh}(a)}{a} \right) = 0$$

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad V(x) = \ln \left(\frac{\text{sh}(x)}{x} \right) \quad (\text{et } V(0) = 0)$$

II.2.3. Pour $x \in \mathbf{R}^*$, $p(x) = xe^{V(x)} = x \frac{\text{sh}(x)}{x}$ donc $p(x) = \text{sh}(x)$ ce qui, par ailleurs, est vrai également en $x = 0$.

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \text{ on a : } \text{sh}(x) = p(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

3 Intégrale à paramètre, interversion série-intégrale

III.1. III.1.1. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\lim_{t \rightarrow 0} \pi t = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} xt = 0$ donc $\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\pi}$ d'où $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(x, t) = \frac{x}{\pi}$.

III.1.2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

- La fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- D'après la question précédente, on peut la prolonger par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0, 1]$.
faussement impropre pour la borne réelle 0
- au voisinage de $+\infty$, $|h(x, t)| \leq \frac{1}{\exp(\pi t) - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(-\pi t) \geq 0$, or $t \mapsto \exp(-\pi t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $t \mapsto h(x, t)$ aussi.

pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.2. III.2.1. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ donc h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbf{R} \times]0, +\infty[$ et à tout ordre.

- Méthode via $\sin'' = -\sin$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = t \frac{\cos(tx)}{\exp(\pi t) - 1}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = -t^2 \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1},$$

on en déduirait par récurrence sur p :

$$\frac{\partial^{2p} h}{\partial x^{2p}}(x, t) = (-1)^p t^{2p} \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1}, \quad \frac{\partial^{2p+1} h}{\partial x^{2p+1}}(x, t) = (-1)^p t^{2p+1} \frac{\cos(tx)}{\exp(\pi t) - 1}.$$

- Méthode via $\sin'(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = t \frac{\sin(tx + \frac{\pi}{2})}{\exp(\pi t) - 1}, \text{ donc par récurrence sur } n \in \mathbf{N}, \quad \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) = t^n \frac{\sin(tx + n\frac{\pi}{2})}{\exp(\pi t) - 1}.$$

puis $\sin(\theta + 2p\frac{\pi}{2}) = \sin(\theta + p\pi) = (-1)^p \sin(\theta)$, $\sin(\theta + (2p+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^p \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = (-1)^p \cos(\theta)$.

III.2.2. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. (le cas $n = 0$ a été vu au III.1.2)) :

- $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$;
- Je préfère éviter de séparer n pair/impair...

$$\forall t > 0, \quad 0 \leq \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq t^n \frac{1}{\exp(\pi t) - 1} \quad (1)$$

or $t^n \frac{1}{\exp(\pi t) - 1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\pi} t^{n-1}$ qui admet une limite finie quand t tend vers 0 car $n \geq 1$, donc

$t \mapsto t^n \frac{1}{\exp(\pi t) - 1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (car prolongeable par continuité en 0) et, par (1),

$t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1]$;

- $t^n \frac{1}{\exp(\pi t) - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^n e^{-\pi t}$. Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^n e^{-\pi t} = 0 < 1$ (croissance comparée) donc au voisinage de $+\infty$, on aura $t^2 t^n e^{-\pi t} \leq 1$ donc $0 \leq t^n e^{-\pi t} \leq \frac{1}{t^2}$. L'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $]1, +\infty[$ entraîne

celle de $t \mapsto t^n \frac{1}{\exp(\pi t) - 1}$ et (1) celle $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$

la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.3. On applique le théorème de dérivation à $f(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t) dt$

- On a vu que f était définie sur $\mathbf{R}$ (cf III.1.2);

- que h admettait à tout ordre des dérivées partielles par rapport à x et que $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$ étaient intégrables sur $]0, +\infty[$ (cf III.2)
- reste la domination : On a en fait démontré que $t \mapsto t^n \frac{1}{\exp(\pi t) - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que relation (1) est valable pour tout réel x et tout $n \in \mathbf{N}^*$ ce qui permet d'appliquer le théorème du cours.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $m \in \mathbf{N}$, on a :

$$f^{(2m)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m} \sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} dt \text{ et } f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1} \cos(tx)}{\exp(\pi t) - 1} dt.$$

Remarque : y compris pour $f^{(0)} = f$.

III.4. III.4.1. Archi classique : somme d'une série géométrique avec $q = e^{-\pi t} \in [0, 1[$:

$$\text{Pour } t > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t) = \exp(-\pi t) \frac{1}{1 - \exp(-\pi t)} = \frac{\exp(\pi t)}{\exp(\pi t) - 1} \frac{1}{\exp(\pi t) - 1} = \frac{1}{\exp(\pi t) - 1}.$$

III.4.2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t) \sin(tx)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dominée par $t \mapsto \exp(-n\pi t)$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$:

la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t) \sin(tx)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour le calcul on peut faire une double intégration par parties ou utiliser les complexes :

$$\text{Pour } b \geq 0, \int_0^b \exp(-n\pi t) \exp(itx) dt = \int_0^b \exp([-n\pi + ix]t) dt = \frac{1}{-n\pi + ix} [\exp([-n\pi + ix]t)]_0^b$$

Or $|\exp([-n\pi + ix]b)| = |\exp(-n\pi b) \exp(ixb)| = \exp(-n\pi b) \times 1 \rightarrow_{b \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t) \exp(itx) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^b \exp(-n\pi t) \exp(itx) dt = \frac{1}{-n\pi + ix} (0 - 1) = \frac{n\pi + ix}{(n\pi)^2 + x^2}$$

D'où en prenant la partie imaginaire :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t) \sin(tx) dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t) \exp(itx) dt \right) = \frac{x}{(n\pi)^2 + x^2} = \frac{1}{2} u_n(x).$$

III.4.3. « Remarque » : l'énoncé revient aux sommes partielles car on ne pouvait pas appliquer le théorème du cours...

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $t > 0$ (pour que $q = e^{-\pi t} \neq 1$) :

$$h_n(x, t) = \sum_{k=1}^{k=n} [\exp(-\pi t)]^k \sin(tx) = \exp(-\pi t) \frac{1 - \exp(-n\pi t)}{1 - \exp(-\pi t)} \sin(tx) = (1 - \exp(-n\pi t)) \frac{\sin(tx)}{e^{\pi t} - 1}.$$

On va appliquer le théorème de convergence dominée (x est fixé) :

- (convergence simple) Pour tout $t > 0, h_n(x, t) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} h(x, t)$ et on constate que la limite simple $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$;
- pour tout $n \in \mathbf{N}^*, t \mapsto h_n(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$;
- (domination) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\forall t > 0, |h_n(x, t)| = \left| (1 - \exp(-n\pi t)) \frac{\sin(tx)}{e^{\pi t} - 1} \right| \leq \frac{|\sin(tx)|}{e^{\pi t} - 1}$$

et on a vu que la fonction $t \mapsto |h(x, t)|$ était intégrable sur $]0, +\infty[$

donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x, t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \exp(-k\pi t) \sin(tx) dt$$

Or par linéarité

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \exp(-k\pi t) \sin(tx) dt = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{+\infty} \exp(-k\pi t) \sin(tx) dt = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2} u_k(x)$$

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2} U(x).$$