OPTIONS M ET P' - EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 2 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve comporte 2 pages

N.B. Dans les questions du problème comportant la recherche de résultats numériques (questions 3°) et 4°)), le candidat expliquera la marche suivie pour conduire les calcu en donnant les justifications nécessaires, et indiquera, s'il y a lieu, le titre et l'auteur des Tables de valeurs numériques utilisées.

Les questions 4°) et 5°) sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) On considère une série numérique convergente, à termes strictement positifs

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

On désigne par S sa somme et par S_n la somme des n premiers termes :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

On suppose que la suite ayant pour terme général $\rho_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement décroissante. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que les inégalités

$$\rho_n < 1 \quad \text{et} \quad 0 < S - S_n < u_n \frac{\rho_n}{1 - \rho_n}$$

soient vérifiées pour $n \geqslant n_0$.

2°) On désigne par e la base des logarithmes népériens (e = 2,718281828 ....), e par f la fonction de la variable réelle x définie par les relations :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \text{ pour } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 1 .$$

Etudier la variation de f(x) quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, et tracer sommairement la courbe représentative correspondante, soit (C), rapportée à un repère orthonormé (Ω) ayant pour axes Ox, Oy.

Démontrer que f(x) et $[f(x)]^2$ sont développables en série entière de la variable x dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$; former ces deux développements.

(On pourra remarquer que $[f(x)]^2 = \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2}$, pour $x \neq 0$).

3°) On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ et $K = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2 dx$.

Démontrer, à partir des deux développements précédents, que chacun des nombres I et K peut êt défini comme la somme d'une série numérique vérifiant les conditions définies dans la questio Former ces deux séries.

Calculer <u>la</u> valeur décimale approchée à 10^{-5} près par défaut du nombre I [c'est-à-dire : la partie entière et les cinq premières décimales de la représentation décimale de I].

Calculer <u>la</u> valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut de nombre K.

4°) Dans le plan, rapporté au repère (Ω), où est tracée la courbe (C), on considère l'ensemble (Δ) des points dont les coordonnées (x,y) vérifient les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

On suppose que (Δ) représente une portion de surface plane homogène, dont le centre d'inertie est noté G.

Exprimer, à l'aide d'intégrales, les coordonnées (ξ,η) du point G et montrer que ξ,η s'expriment simplement en fonction des nombres e, I et K.

Calculer, à partir des résultats numériques trouvés dans la question 3°), une valeur décimale approchée de chacun des nombres ξ et η, en précisant la marge d'incertitude correspondant à ces approximations.

5°) On désigne par (D) la région du plan rapporté au repère (Ω), définie comme l'ensemble des points dont les coordonnées (x,y) vérifient :

$$0 < x < 1 \quad \text{et} \quad x^2 < y < x$$

Montrer que la valeur numérique de l'intégrale double

$$J = \iint_{(D)} e^{xy}\,dxdy$$

peut être exprimée très simplement en fonction du nombre I, et donner l'expression de J en fonction de I.

(On pourra démontrer, au préalable, que, quel que soit l'entier positif p,

le produit $p \cdot \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^p} - 1}{x}\,dx$ est indépendant de p).

°°°