<u>Corrigé de l'épreuve math1 CCP 2001 PSI</u>

<u>PROBLÈME 1</u>

<u>Partie I</u>

I.1. On reconnaît la série géométrique de raison $-x$, donc

$$\boxed{I =]-1,1[\quad \text{et} \quad \text{pour } x \in I, \quad R_{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}}.$$

I.1.2. Si $x \in I$: $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^k = (-1)^{n+1} x^{n+1} R_{-1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} R_n(x)$ n'est autre que la série $\frac{1}{1+x}\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ qui converge ssi $x \in I$. Sa somme est $S(x) = \frac{1}{1+x}\left[\frac{1}{1+x} - u_0(x)\right] = \frac{-x}{(1+x)^2}$.

I.2.1. $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est la série harmonique alternée qui converge par le critère spécial des séries alternées : la suite $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est alternée, tend vers zéro et sa valeur absolue décroit. D'où l'existence de r_n pour $n \in \mathbb{N}$.

I.2.2.1 $\sum_{k=n}^{m} (-1)^k x^k = R_{n-1}(x) - R_m(x) = \frac{1}{1+x}\left(u_n(x) - u_{m+1}(x)\right)$ donc

$$\left|\sum_{k=n}^{m} (-1)^k x^k\right| \leq \frac{1}{1+x}\left(\left|u_n(x)\right| + \left|u_{m+1}(x)\right|\right) \leq \frac{2}{1+x} \leq 2 .$$

I.2.2.2. On fixe n. Posons $f_m(x) = \sum_{k=n} (-1)^k x^k$. Alors $f_m(x) \xrightarrow[m\infty]{} R_{n-1}(x)$ (cv simple) et on a la domination $\left|f_m(x)\right| \leq \varphi(x) = 2$ avec φ intégrable sur I_0 . Par le théorème de convergence dominée $\int_{I_0} f_m \xrightarrow[m\infty]{} \int_{I_0} R_{n-1}(x)$.
Or $\int_{I_0} f_m = \int_{I_0}\left(\sum_{k=n}^{m} (-1)^k x^k\right)dx = \sum_{k=n}^{m}\int_{I_0} (-1)^k x^k dx = \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k}{k+1}$ donc $\sum_{k=n}^{m}\int_{I_0} (-1)^k x^k dx \xrightarrow[m\infty]{} \int_{I_0} R_{n-1}(x)$ ce qui est le résultat demandé. Ceci revient encore à écrire que $\sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[m\infty]{} \int_{I_0} R_{n-1}(x)\,dx$

soit $\boxed{r_n = \int_{I_0} R_{n-1}}$.

I.2.2.3. $r_0 = \int_{I_0} R_{-1} = \int_{I_0} \frac{1}{1+x}dx = \ln 2$.

I.2.2.4. $\sum_{n=0}^{m} R_{n-1}(x) = \frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{m} u_n(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\left(1 - (-x)^{m+1}\right)$ donc $\left|\sum_{n=0}^{m} R_{n-1}(x)\right| \leq \left|1 - (-x)^{m+1}\right| \leq 2$.

I.2.2.5. $\sum_{n=0}^{m}\int_{I_0} R_{n-1}(x)\,dx = \int_{I_0}\sum_{n=0}^{m} R_{n-1}(x)\,dx$. On a encore la domination $\left|\sum_{n=0}^{m} R_{n-1}(x)\right| \leq \varphi(x) = 2$ et la convergence simple $\sum_{n=0}^{m} R_{n-1}(x) \xrightarrow[m\infty]{} R_{-1}(x) + S(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$.

Par application du théorème de convergence dominée : $\int_{I_0}\left(\sum_{n=0}^{m} R_{n-1}(x)\right)dx \xrightarrow[m\infty]{} \int_{I_0} \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

Or $\int_{I_0}\sum_{n=0}^{m} R_{n-1} = \sum_{n=0}^{m} r_n$ par **I.2.2.2.** et Chasles. Donc $\sum_{n=0}^{m} r_n \xrightarrow[m\infty]{} \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 0} r_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} r_n = \frac{1}{2}}.$$

II.1. $u_k = R_{k-1} - R_k$ donne

$$\sum_{k=1}^{n} k\,u_k = \sum_{k=1}^{n} k\,R_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k\,R_k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,R_k - \sum_{1}^{n} k\,R_k$$
$$= R_0 + \sum_{1}^{n-1} R_k - nR_n = \sum_{0}^{n-1} R_k - nR_n$$

soit $\boxed{\sum_{0}^{n} R_k - \sum_{1}^{n} k\,u_k = (n+1)\,R_n}$.

II.2. Choisissons $u_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ avec $R_k = r_k$. La formule précédente donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r_k - \sum_{1}^{n} k\frac{(-1)^{k+1}}{k} = (n+1)\,r_n$

Alors $$\sum_{k=1}^{n}(n-k)\frac{(-1)^{k+1}}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{1}^{n} k\,u_k = n\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} - r_n\right) - \sum_{1}^{n} k\,u_k$$
$$= nr_0 - nr_n - \sum_{1}^{n} k\,u_k = nr_0 - nr_n + (n+1)r_n - \sum_{k=0}^{n} r_k$$
$$= nr_0 - \sum_{k=0}^{n-1} r_k = n\ln 2 - \frac{1}{2} + o_{n\infty}(1)$$
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(n-k)\frac{(-1)^{k+1}}{k} = n\ln 2 - \frac{1}{2} + o_{n\infty}(1)}.$$

II.3.1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k = \sum_{k=0}^{n} R_k - (n+1)R_n \le \sum_{k=0}^{n} R_k \le \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$ si l'on suppose la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\ge 0} R_k$.

Ainsi la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\ge 1} ku_k$ est majorée. Cette série est donc convergente.

II.3.2. Réciproquement supposons la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\ge 1} ku_k$.

$$0 \le (n+1)R_n = (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(n+1)u_k \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k \xrightarrow[n\infty]{} 0$$ en tant que reste d'une série convergente.

Donc $(n+1)R_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

II.3.3. Par **II.3.1.** si $\displaystyle\sum_{k\ge 0} R_k$ converge alors $\displaystyle\sum_{k\ge 1} ku_k$ converge.

Réciproquement si $\displaystyle\sum_{k\ge 1} ku_k$ converge alors $(n+1)R_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = \sum_{k=1}^{n} ku_k + (n+1)R_n \xrightarrow[n\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k + 0.$$

Conclusion $\boxed{\sum_{k\ge 0} R_k \text{ converge ssi } \sum_{k\ge 1} ku_k \text{ converge et dans ce cas elles ont même somme.}}$

II.4. On applique **II.3.3.** :

$\displaystyle\sum_{n\ge 0} R_n(x)$ converge ssi $\displaystyle\sum_{k\ge 1} k\frac{1}{k^x}$ converge ce qui équivaut à la condition $x-1>1$.

Donc $\boxed{D_1 =]2,+\infty[}$.

De plus si $x \in D_1$ alors $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{k^x} = \zeta(x-1)}$.

II.5.1. $ka_k x^k = x\left(ka_k x^{k-1}\right)$, or $\sum_{k\geq 1} ka_k x^{k-1}$ est la série entière dérivée de $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$, son rayon de convergence est encore ρ d'après le cours et de plus $\sum_{k=1}^{+\infty} x\left(ka_k x^{k-1}\right) = xf'(x)$.

$\left|(n+1)R_n(x)\right| \leq (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|a_k x^k\right| \xrightarrow[n\infty]{} 0$ en appliquant **II.3.2.** à la série convergente à termes positifs $\sum_k k\left|a_k x^k\right|$. Donc $(n+1)R_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

II.5.2. On a toujours $\sum_{k=0}^{n} R_k(x) = \sum_{k=1}^{n} ku_k(x) + (n+1)R_n(x)$ donc $\sum_{k=0}^{n} R_k(x) \xrightarrow[n\infty]{} xf'(x) + 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-\rho,\rho[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = xf'(x)}$$

II.5.3.1. $\left|a_k\right| \leq 2$ donc $\rho \geq 1$. De plus pour $x = 1$ $\left|a_k 1^k\right| = \left|a_k\right|$ n'a pas de limite donc $\boxed{\rho = 1}$.

Autre méthode: observons que suivant la parité de k on a $\left|a_k\right| = 1$ ou $\frac{1}{k}$ d'où l'encadrement $\frac{1}{k} \leq \left|a_k\right| \leq 1$ qui fournit $1 \geq \rho \geq 1$.

II.5.3.2. Avec ce qui précède si $x \in]-1,1[$ $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = xf'(x)$ où $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right)x^n$.

D'une part $\sum \sin\frac{n\pi}{2} x^n$ cv pour $x \in]-1,1[$ car $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| \leq 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{n\pi}{2} x^n = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{2p+1} = \frac{x}{1+x^2}$.

D'autre part $\sum \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} x^n$ cv pour $x \in]-1,1[$ car $\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right| \leq 1$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} x^n = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{2p}}{2p} = \frac{-1}{2}\ln(1+x^2).$$

D'où $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x-x^2-x^3}{(1+x^2)^2}$ et finalement

Pour $x \in]-1,1[$: $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = x\frac{1-x-x^2-x^3}{(1+x^2)^2}}$.

PROBLÈME 2

I.1. $W_3 = \begin{pmatrix} w_{0,0} & 0 & w_{0,2} & 0 \\ 0 & w_{1,1} & 0 & w_{1,3} \\ w_{2,0} & 0 & w_{2,2} & 0 \\ 0 & w_{3,1} & 0 & w_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2^2}C_2^1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^2}C_2^1 & 0 & \frac{1}{2^4}C_4^2 \\ \frac{1}{2^2}C_2^1 & 0 & \frac{1}{2^4}C_4^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^4}C_4^2 & 0 & \frac{1}{2^6}C_6^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$.

I.2.

$$\det W_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{16} \end{vmatrix} \quad \text{par } L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{16} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{32} - \frac{3}{64}\right) = \frac{1}{2^9}$$

I.3.1. $J_0 = \int_0^\pi dt = \pi \qquad J_1 = \int_0^\pi \cos t\, dt = [\sin t]_0^\pi = 0$.

I.3.2. $J_{m+2} = \int_0^\pi \cos^{m+1} t \cos t\, dt = \left[\sin t \cos^{m+1} t\right]_0^\pi - \int_0^\pi -(m+1)\cos^m t \sin t \sin t\, dt$

$= 0 + (m+1)\int_0^\pi \cos^m t\,(1-\cos^2 t)\, dt = (m+1)J_m - (m+1)J_{m+2}$ d'où

$$\boxed{(m+2)J_{m+2} = (m+1)J_m}.$$

$J_1 = 0$ donne en particulier pour tout p : $\boxed{J_{2p+1} = 0}$.

I.3.3 On a d'autre part $2kJ_{2k} = (2k-1)J_{2k-2}$ d'où $J_{2k} = \frac{2k-1}{2k}J_{2k-2}$ puis

$$J_{2p} = J_0 \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} = J_0 \prod_{k=1}^{p} \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} J_0 = \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}\pi \ .$$

I.3.4. $w_{i,j} = \frac{1}{\pi} J_{i+j}$.

II.1. $< e_0 \ / \ e_0 >= 1$.

Si $k \geq 1$ $\quad < e_0 \ / \ e_k >= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi \cos kt\, dt = 0$.

Si $i \geq 1, \quad j \geq 1 \quad < e_i \ / \ e_j >= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos it \cos jt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos(i+j)t + \cos(i-j)t)\, dt$

$$= \begin{cases} 0+0 & \text{si } i \neq j \\ 0+1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

II.2. La famille $(e_0, \ldots, e_m)$ est donc orthonormée, elle est donc libre, c'est donc une base du s.e.v. qu'elle engendre i.e. $H_m(e)$.

II.3. $v_m(t)=\cos^m t=\left(\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^m=\dfrac{1}{2^m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}C_m^k e^{it}e^{-i(m-k)t}=\dfrac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k e^{i(2k-m)t}=\dfrac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k e^{it}e^{i(m-2k)t}$ via $k:=m-k$

$=\dfrac{1}{2^m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}C_m^k\cos(2k-m)t$ en prenant la demi-somme des deux sommes précédentes

$=\dfrac{1}{2^{m+\frac12}}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}C_m^k\sqrt2\cos(2k-m)t$ et on obtient ainsi une combinaison linéaire des e_k.

De plus si $\dfrac{m}{2}<k\le m$ alors $2k-m\in[\![1,m]\!]$

si $0\le k<\dfrac{m}{2}$ on peut écrire $\cos(2k-m)t=\cos(m-2k)t$ et $m-2k\in[\![1,m]\!]$

si $k=\dfrac{m}{2}$ (et m pair) $\cos(2k-m)t=e_0(t)$

ce qui permet de préciser que $v_m\in\operatorname{vect}(e_0,\dots,e_m)=H_m(e)$.

$\boxed{\text{Si } m=0 \quad q_{0,0}=1}$

$\boxed{\text{Si } m\ne0 \quad q_{m,m}=\dfrac{1}{2^{m+\frac12}}\times2=\dfrac{1}{2^{m-\frac12}}}$ (envisager $k=0$ et $k=m$).

II.4. Pour tout $k\in[\![0,m]\!]$ $v_k\in H_k(e)$ donc $v_k\in H_m(e)$. Par conséquent $H_m(v)=\operatorname{vect}\big(v_0,\dots,v_m\big)$ est un s.e.v. de $H_m(e)$.

Par ailleurs la matrice Q_m de la famille $\big(v_0,\dots,v_m\big)$ dans la base $(e_0,\dots,e_m)$ est triangulaire supérieure à termes diagonaux $q_{k,k}$ non nuls, elle est donc de rang $m+1$, ce qui prouve que $\big(v_0,\dots,v_m\big)$ est libre.

Donc $\dim H_m(v)=m+1=\dim H_m(e)$ et finalement $\boxed{H_m(v)=H_m(e)}$.

II.5. En observant que $v_{m+1}=q_{m+1,m+1}e_{m+1}+\displaystyle\sum_{k=0}^{m}q_{k,m+1}e_k$ où $q_{m+1,m+1}e_{m+1}\perp H_m(e)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}q_{k,m+1}e_k\in H_m(e)$ on obtient que le projeté orthogonal de v_{m+1} sur $H_m(e)$ est $p(v_{m+1})=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}q_{k,m+1}e_k$.

Alors $\boxed{d_m=\left\|v_{m+1}-p(v_{m+1})\right\|=\left\|q_{m+1,m+1}e_{m+1}\right\|=\left|q_{m+1,m+1}\right|=\dfrac{1}{2^{m+\frac12}}}$.

II.6.1. La matrice Q_n étant triangulaire supérieure $\det Q_n=q_{0,0}\displaystyle\prod_1^n q_{k,k}=1\times\prod_1^n\left(\frac12\right)^{k-\frac12}=\left(\frac12\right)^{\sum_1^n\left(k-\frac12\right)}=\left(\frac12\right)^{\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{2}}$

Soit: $\boxed{\det Q_n=2^{-\frac{n^2}{2}}}$.

II.6.2. On observe que $w_{i,j}=<v_i \;/\; v_j>$ d'où $W_n={}^tQ_nQ_n$ car la base $(e_0,\dots,e_n)$ est orthonormée.

D'où $\boxed{\det W_n=\left(\det Q_n\right)^2=2^{-n^2}}$ et on retrouve $\det W_3$.