Mines-Ponts 2020 MATH 2
M.SAADAOUI § B.BAKHOUCH
LYDEX (BENGUERIR)

A. Préliminaires

1. En égalisant le coefficient de X^n dans l'égalité $(1+X)^{2n} = (1+X)^n (1+X)^n$, et en utilisant que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$, on a:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

2. A l'aide de la formule de stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}$, on a

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4n\pi}}{2\pi n^{2n+1} e^{-2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

3. Pour $\alpha \in]0,1[$, par décroissance de $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, on a $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$, $k \geq 2$,ce qui donne

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

$0 < \alpha < 1$, donc $1 + \int_a^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. D'où le résultat.

Pour $\alpha > 1$, par comparaison série intégrale, on a cette fois-ci:

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$$

Les deux extrêmes de l'inégalité sont équivalents à $\frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$, donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$.

4. On obtient la relation $I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$ par une simple intégration par parties.

Pour tout $x > 0$, on a $0 \leq \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{\ln(x)} \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)} = \frac{I(x)}{\ln(x)}$, donc

$$0 \leq \frac{1}{I(x)} \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)} \leq \frac{1}{\ln(x)} \underset{+\infty}{\to} 0$$

D'où le résultat.

On a $\frac{x}{\ln(x)} \underset{+\infty}{\to} +\infty$, donc $\frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$, ce qui donne $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$.

5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ pour tout $x \in \left]-1,1\right[$.

Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$, donc:

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\ , (1-x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.$$

B. Marches aléatoires, récurrence

6. Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $|\mathbb{P}(S_n = 0)\, x^n| \leq |x|^n$, donc la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)\, x^n$ est convergente pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ donc le rayon de convergence de la série définissant F est ≥ 1.

De même pour G.

F et G sont les sommes de deux séries entières de rayon de convergente R et $R' \geq 1$, donc sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur leur intervalle ouvert de convergence et en particulier sur $\left]-1,1\right[$ puisque $\min(R, R') \geq 1$.

La fonction $x \mapsto \mathbb{P}(R = n)\, x^n$ est continue sur $[-1,1]$ et pour tout $x \in [-1,1]$, $|\mathbb{P}(R = n)\, x^n| \leq \mathbb{P}(R = n)$.

La série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(R = n)$ est convergente, donc la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(R = n)\, x^n$ est normalement convergente(donc uniformément). Donc G est continue sur $[-1,1]$.

$(R = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, donc

$$G(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}(R = n)\right) = \mathbb{P}(R \neq +\infty).$$

7.
$$\begin{aligned} \mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) &= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n - S_k = 0) \\ &= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, X_{k+1} + \dots + X_n = 0) \end{aligned}$$

Les variables aléatoires $S_1, .., S_k$ sont des fonctions $X_1, \dots, X_k$ donc $S_1, \dots, S_k, X_{k+1} + \dots + X_n$ sont mutuellement indépendantes, donc:

$$\mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0) \times \mathbb{P}(X_{k+1} + \dots + X_n = 0).$$

Les variables aléatoires étant de même loi, donc:

$$\mathbb{P}(X_{k+1} + \dots + X_n = 0) = \sum_{a_{k+1}+\dots+a_n=0} \mathbb{P}(X_1 = a_{k+1}) \dots \mathbb{P}(X_{n-k} = a_n) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{n-k} = 0) = \mathbb{P}(S_{n-k}$$

Donc

$$\mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(R = k) \times \mathbb{P}(S_{n-k} = 0).$$

D'après la formule des probabilités totales, on a:

$$\mathbb{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d \mid R = k)\, \mathbb{P}(R = k)$$

D'autre part $\mathbb{P}(S_n = 0_d \mid R = k) = 0$ pour $k > n$.

Pour $k \leq n$, on a $\mathbb{P}(S_n = 0_d \mid R = k)\,\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(R = k) \times \mathbb{P}(S_{n-k} = 0)$.
Donc

$$\mathbb{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R = k) \times \mathbb{P}(S_{n-k} = 0)$$

8. Pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$,

$$F(x) = \mathbb{P}(S_0 = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d)\, x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d)\, x^n \ , \mathbb{P}(S_0 = 0) = 1,$$

puis à par la question précédente, on a:

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = k)\,\mathbb{P}(S_{n-k} = 0)\, x^n.$$

Les séries entières définissant F et G sont de rayons de convergences ≥ 1, donc d'après le produit de Cauchy pour les séries entières, on a:

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[\ , F(x) = 1 + F(x)\, G(x).$$

De l'égalité précédente, on a pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$, $G(x) \neq 1$ et $F(x) = \dfrac{1}{1 - G(x)}$.

Si $G(1) \neq 1$, alors $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = \dfrac{1}{1 - G(1)} = \dfrac{1}{1 - \mathbb{P}(R \neq +\infty)}$.

Si $G(1) = 1$, alors $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = +\infty$.

9. Soit $A > 0$, $\sum c_n$ est une série divergente et à terme positifs donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} c_k \right) = +\infty$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k \geq 2A$. Soit $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} c_k x^k$, P est continue et $P(1) > A$ donc il existe $a \in \left]0, 1\right[$ tel que $\forall x \in \left]1 - a, 1\right[$, $P(x) \geq A$

On a donc pour tout $\forall x \in \left]1 - a, 1\right[$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \geq P(x) \geq A$. Donc $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty$

On peux raisonner aussi comme suit:

La suite $(c_n)_n$ est positive, donc la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ est croissante sur $\left[0, 1\right[$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Supposons que L est fini, on a pour tout $x \in \left[0, 1\right[$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $f(x) \geq \sum\limits_{n=0}^{p} c_n x^n$

puis par passage à la limite en 1^-, on a $L \geq \sum\limits_{n=0}^{p} c_n$ pour tout p. La série $\sum c_n$ étant à terme positif, donc $\sum c_n$ est convergente, ce qui est absurde.

10. Si $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$, alors d'après la question **8**, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d)\, x^n \to +\infty$ lorsque $x \to 1^-$, donc par contraposée du résultat de la question **9,** la série $\sum\limits^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ est divergente.

Si $\mathbb{P}(R \neq +\infty) < 1$, alors $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = \dfrac{1}{1 - \mathbb{P}(R \neq +\infty)} = L \in \mathbb{R}$. Par croissante de F sur $[0,1[$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*; \forall x \in [0,1[\ , \sum_{n=0}^{p} \mathbb{P}(S_n = 0_d)\, x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d)\, x^n \leq L$$

Par passage à la limite en 1^-, on a $\sum\limits_{n=0}^{p} \mathbb{P}(S_n = 0_d) \leq L$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ ce qui assure la convergence puis c'est une série à terme positifs.

11. $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{i-1} (S_i - S_i \neq 0)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{i-1} (X_{k+1} + ... + X_i \neq 0)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{i-1} (X_1 + ... + X_{i-k} \neq 0)\right)$

Donc $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{i-1} (S_{i-k} \neq 0)\right) = \mathbb{P}(R > i)$.

On a $N_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i + 1_{(S_0=0)}$, donc $E(N_n) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} E(Y_i) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R > i)$.

12. La suite $((R > k))_k$ est décroissante, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{P}(R > k) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i \geq k} (R > i)\right) = \mathbb{P}(R = +\infty)$ puis par Cesaro, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R > i) = \mathbb{P}(R = +\infty)$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(N_n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R > i) = \mathbb{P}(R = +\infty).$$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

13. Posons $Y_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, donc les Y_i aussi

$S'_n = Y_1 + ... + Y_n = \dfrac{S_n + n}{2}$ suit la loi $\mathcal{B}(np)$.

On a $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = \mathbb{P}\left(S'_{2n+1} = \dfrac{2n+1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(S'_{2n+1} = n + \dfrac{1}{2}\right) = 0$ puisque S'_{2n+1} est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On a $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(S'_{2n} = n) = \dbinom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \dbinom{2n}{n} (pq)^n$.

14. D'après la question précédente, on a $F(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\, x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)\, x^{2n}$

$F(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dbinom{2n}{n} (pq)^n x^{2n} = F(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\dbinom{2n}{n}}{4^n} (4pqx^2)^n = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4pqx^2}}$ (d'après **5.)**

D'après **8,** $G(x) = 1 - \dfrac{1}{F(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$.

$\mathbb{P}(R \neq +\infty) = G(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq} = \sqrt{1 - 4p + 4p^2} = \sqrt{(p-q)^2} = |p - q|$.

A l'aide de la question **5**,

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} x^n$$

$$G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} \left(4pqx^2\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} (pq)^n x^{2n}.$$

Par unicité de développement en série entière, on a:

$$\mathbb{P}(R = 2n+1) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(R = 2n) = \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} (pq)^n$$

15. Si $p = q = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(R = 2n) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(2n-1)}$ puis à l'aide de la question $\mathbb{P}(R = 2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.

On a $E(N_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R > k)$, on a $\mathbb{P}(R > k) = \sum_{2i \geq k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = 2i)$.

$\mathbb{P}(R > 2k) = \sum_{2i\geq 2k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = 2i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = 2i)$. D'autre part on a $\mathbb{P}(R = 2i) \underset{i\to+\infty}{\sim} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}(2i)^{3/2}}$

et $\sum \frac{1}{i^{3/2}}$ est convergente et à termes positifs, donc par les relations de comparaions, on a:

$$\mathbb{P}(R > 2k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}(2i)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{i^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}(2k)^{1/2}}.$$

De même $\mathbb{P}(R > 2k+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}(2k+1)^{1/2}}$.

Donc $\mathbb{P}(R > k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}k^{1/2}}$. Encore par les relations de comparaisons

$$E(N_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R > k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/2}} \right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

D. Un résultat asymptotique

16. Pour $0 \leq k \leq n$, $0 \leq a_n \leq a_k$, donc $a_n B_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1$,ce qui donne que $a_n \leq \frac{1}{B_n}$.

Par décroissante de la suite $(a_n)_n$, on peux écrire: $1 = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{m-k} + \sum_{k=n}^{m} a_k b_{m-k} \leq$ $a_0 \left(\sum_{k=0}^{n} b_{m-k} \right) + a_n \left(\sum_{k=n}^{m} b_{m-k} \right) = a_0 \left(\sum_{k=0}^{n} b_{m-k} \right) + a_n B_{m-n}$

Donc $1 \leq a_0 (B_m - B_{m-n}) + a_n \left(\sum_{k=n}^{m} b_{m-k} \right). = a_0 (B_m - B_{m-n}) + a_n B_{m-n}$

17. Posons $\varphi(n) = m_n$, on a $B_{\varphi(n)-n} \underset{+\infty}{\sim} B_{\varphi(n)}$ et $B_{\varphi(n)} - B_{\varphi(n)-n} \to 0$

Posons $B_{\varphi(n)} = B_{\varphi(n)-n} + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$, l'équivalence $B_{\varphi(n)-n} \underset{+\infty}{\sim} B_{\varphi(n)}$ se traduit par $\varepsilon_n \underset{+\infty}{=} o\left(B_{\varphi(n)}\right)$

Pour n assez grand, on a $1 \leq a_0\left(B_{\varphi(n)} - B_{\varphi(n)-n}\right) + a_n B_{m_{\varphi(n)}-n} \leq a_0\varepsilon_n + a_n\left(B_n + o\left(B_n\right)\right)$

Donc $1 - a_0\varepsilon_n - a_n o\left(B_n\right) \leq a_n B_n \leq 1$.

La suite $\left(a_n B_n\right)_n$ est bornée, donc $a_n o\left(B_n\right) = o\left(a_n B_n\right) = o(1) \to 0$, et donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n B_n = 1$, donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{B_n}$.

18. On a $b_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{k}$ est divergente, donc par les relations de comparaisons on a:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \underset{+\infty}{\sim} C\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} C\ln(n).$$

Posons $\varphi(n) = n^2$, par $B_{n^2} \underset{+\infty}{\sim} C\ln\left(n^2\right) = 2C\ln(n)$, $B_{n^2-n} \underset{+\infty}{\sim} C\ln\left(n^2-n\right) = 2C\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} B_{n^2}$.

On a $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $A > 0$ tel que $\forall k \geq n_0$, $b_k \leq \dfrac{A}{k}$.

Pour n assez grand, on a $B_{\varphi(n)} - B_{\varphi(n)-n} = \displaystyle\sum_{k=n^2-n+1}^{n^2} b_k \leq A \sum_{k=n^2-n+1}^{n^2} \frac{1}{k} \leq A\int_{n^2-n}^{n^2}\frac{dt}{t} = A\ln\left(\frac{n^2}{n^2-n}\right) \to 0$

D'après la question **17**, on a $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{B_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{C\ln(n)}$.

E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdös et Dvoretzky

19. Posons $B_n^n = (S_n = 0)$, $B_k^n = (S_k = 0\ , S_{k+1} \neq 0, ..., S_n \neq 0)$, alors :

$$\mathbb{P}(B_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}_{(S_k=0)}(S_{k+1} \neq 0, \ldots, S_n \neq 0)$$

D'autre part $\mathrm{P}_{(S_k=0)}(S_{k+1} \neq 0, \ldots, S_n \neq 0) = \mathrm{P}_{(S_k=0)}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \ldots, S_n - S_k \neq 0)$.

Pour $j \geq k+1$, $S_j - S_k = X_{k+1} + ... + X_n$, les variables $S_{k+1} - S_k, \ldots, S_n - S_k$ sont des fonctions de $X_{k+1}, \ldots, X_n$ et donc indépendantes de $S_k = X_1 + ... + X_k$ puisque les variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, donc

$$\mathbb{P}_{(S_k=0)}(S_{k+1} \neq 0, \ldots, S_n \neq 0) = \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \ldots, S_n - S_k \neq 0)$$

Avec un raisonnement analogue à celui de la question **7.**, on a alors

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \ldots, S_n - S_k \neq 0) = \sum_{a_1,\ldots,a_{n-k}\neq 0} \mathbb{P}\left(S_1 = a_1, \ldots, S_{n-k} = a_{n-k}\right) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{n-k} \neq 0))$$

Donc $\mathrm{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{n-k} \neq 0)) = \mathbb{P}(R > n-k)$ ce qui donne:

$$\mathbb{P}(B_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(R > n-k)$$

On a $B_k^n \cap B_{k'}^n = \emptyset$ si $k \neq k'$ et $B_0^n \cup B_1^n \cup ... \cup B_n^n = \Omega$, donc:

$$1 = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(B_k^n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(R > n-k)$$

20. Si on pose $X_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \varepsilon'_i \end{pmatrix}$ avec $(\varepsilon_i, \varepsilon'_i) \in A = \{(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\}$

alors $(X_1 + ... + X_{2n} = 0)$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{lcl} \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_{2n} & = & 0 \\ \varepsilon'_1 + ... + \varepsilon'_{2n} & = & 0 \end{array} \right.$ et $(\varepsilon_i, \varepsilon'_i) \in A$.

On note $C_n = \left\{ \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon'_1, ..., \varepsilon_{2n}, \varepsilon'_{2n}) \text{ tel que } (\varepsilon_i, \varepsilon'_i) \in A \text{ et } \left\{ \begin{array}{lcl} \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_{2n} & = & 0 \\ \varepsilon'_1 + ... + \varepsilon'_{2n} & = & 0 \end{array} \right\} \right.$

$(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(X_1 + ... + X_{2n} = 0) = \underset{\varepsilon \in C_n}{\cup} (X_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon'_1), X_2 = (\varepsilon_2, \varepsilon'_2) ..., X_{2n} = (\varepsilon_{2n}, \varepsilon'_{2n}))$

Par indépendance mutuelle des variables aléatoires $(X_i)_i$, on a:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(X_1 + ... + X_{2n} = 0) = \sum_{\varepsilon \in C_n} \mathbb{P}(X_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon'_1)) \mathbb{P}(X_2 = (\varepsilon_2, \varepsilon'_2)) ... \mathbb{P}(X_{2n} = (\varepsilon_{2n}, \varepsilon'_{2n}))$$

Les $(X_i)_i$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X, donc:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{\varepsilon \in C_n} 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \mathrm{Card}(C_n).$$

Il s'agit donc de dénombrer l'ensemble C_n.

Pour avoir $\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_{2n} = 0$, on doit choisir k cases pour la valeur 1 et k cases pour -1 puis le reste doit être des zéros, ce qui donne $\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}$. Pour un tel choix on a :

$$\overbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline \end{array}}_{\text{Les } \varepsilon'_i \text{ ici sont imposés}}}^{k \text{ élts égaux } 1} \quad \overbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & \dots & -1 \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline \end{array}}_{\text{Les } \varepsilon'_i \text{ ici sont imposés}}}^{k \text{ élts égaux -1}} \quad \overbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}}_{\text{Ici il faut autant de 1 que de -1}}}^{2n-2k \text{ élts égaux } 0}$$

$(\varepsilon_i, \varepsilon'_i) \in A$, donc si $\varepsilon_i = 1$ ou $\varepsilon_i = -1$, alors $\varepsilon'_i = 0$. Les $2k$ cases choisis avant imposent des valeurs pour les ε'_i , pour les $2n - 2k$ cases restantes on a $\varepsilon_i = 0$ donc $\varepsilon'_i \in \{-1, 1\}$ ce ce qui impose de de choisir $n - k$ cas pour 1 et $n - k$ cases pour -1 , donc le nombre de choix possibles est

$$\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = (2n)! \left(\frac{1}{k!\,(n-k)!}\right)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2$$

Il suffit donc de varier k pour avoir,

$$\mathrm{Card}(C_n) = \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}^2 \text{ (d'après la question } \mathbf{1}\text{).}$$

Donc

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}^2.$$

21. Par un raisonnement analogue à a question précédente on a $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$, donc:

$$1 = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(R > 2(n-k))$$

En posant $b_k = (S_{2k} = 0)$ et $a_k = \mathbb{P}(R > 2k)$.

On a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_{2k}=0)\mathbb{P}(R>2n-2k) = \sum_{j \text{ pair },0\leq j\leq 2n}^{2n} \mathbb{P}(S_j=0)\mathbb{P}(R>2n-j)$$

D'autre part, on a $P\left(S_{2j+1}=0\right)$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{j=0}^{2n} \mathbb{P}(S_j=0)\mathbb{P}(R>2n-j) = 1 \text{ (d'après la question } \mathbf{19)}$$

La suite $(a_k)_k$ est strictement positive et décroissante et la suite $(b_k)_k$ est strictement positive et vérifie les hypothèses de la partie **D.**
D'autre part, on a:

$$b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\binom{2n}{n}^2 \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\right)^2 \times \frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{\pi n}.$$

Donc, d'après la question **18,** on a $a_n = P\left(R>2n\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\ln\left(n\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\ln\left(2n\right)}$.

On a aussi $\mathbb{P}\left(R>2n+2\right) \leq \mathbb{P}\left(R>2n+1\right) \leq \mathbb{P}\left(R>2n\right)$, donc

$$P\left(R>2n+1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\ln\left(n\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\ln\left(2n+1\right)}$$

On en déduit que $\mathbb{P}\left(R>n\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\ln\left(n\right)}$.

Pour $n \geq 2$, $0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\ln\left(n\right)}$ donc la série $\sum \dfrac{1}{\ln\left(n\right)}$ diverge . Par les relations de comparaison, on a:

$$E\left(N_n\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(R>k\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln\left(k\right)}\right).$$

D'autre part, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln\left(t\right)}$ est continue, décroissante et positive sur $[2,+\infty[$, de plus $\int_2^{+\infty}\dfrac{dt}{\ln t}$ diverge, donc

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln\left(k\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_2^{n}\frac{dt}{\ln t} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln\left(n\right)} \text{ (d'après la question } \mathbf{4}).$$

Finalement, on a:

$$E\left(N_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\frac{n}{\ln\left(n\right)}.$$