Un corrigé du concours Mines ponts MP-2018-maths2
SADIK Omar CPGE FES

A. Quelques exemples

1) Posons pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

$S(\theta)$ est une matrice orthogonale et symétrique donc $S(\theta)^2 = S(\theta)^T S(\theta) = I_2$, alors I_2 possède une infinité de racines carrées.

Soit R une racine carrée de I_2, supposons $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(I_2) = R$, alors $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = R$, donc $x^2 = 1$

Les matrices cherchées sont I_2 et $-I_2$.

2) Soit $\mathscr{B}(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^3)$ vérifiant $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = xe_1$ et $u(e_3) = e_1 + ye_2$ où $x, y \in \mathbb{C}$, alors $u^2(e_1) = 0$, $u^2(e_2) = 0$ et $u^2(e_3) = yxe_1$.

Donc toutes les matrices $R(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $R(x)^2 = A$ où $x \in \mathbb{C}^*$.

Soit R une racine carrée de A, supposons $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = R$. On sait que $A^2 = 0$, donc $\exists a, b \in \mathbb{C}$ telles que $aI_3 + bA = R$, donc $R = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

On a $R^4 = A^2 = 0$, donc R est nilpotente donc $a = 0$, alors $bA = R$.

Or $R^2 = A$ et $R^2 = b^2 A^2 = 0$ ce qui est absurde, par conséquent R n'est pas un polynôme en A

3) **Existence**. A est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable, c'est à dire $\exists P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $\exists D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$, posons $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$, car les $\lambda_i > 0$ et $R = P\Delta P^{-1}$, on a bien $R^2 = A$ et R est une racine carrée de A qui est symétrique car ${}^tP = P^{-1}$ et elle est définie positive car ses valeurs sont strictement positive.

Unicité. Supposons qu'elle existe $R_1, R_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $R_1^2 = R_2^2 = A$ et R_1, R_2 sont définies positives.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, les polynômes $X - \sqrt{\lambda}$ et $X + \sqrt{\lambda}$ sont premiers entre eux car $\lambda > 0$, par application du théorème de décomposition des noyaux, on a alors : $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(R_1^2 - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(R_1 - \sqrt{\lambda} I_n) \oplus \operatorname{Ker}(R_1 + \sqrt{\lambda} I_n)$.

R_1 est définie positive, donc $\operatorname{Ker}(R_1+\sqrt{\lambda}I_n)=\{0\}$, alors $\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)=\operatorname{Ker}(R_1-\sqrt{\lambda}I_n)$, par conséquent $\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)=\operatorname{Ker}(R_1-\sqrt{\lambda}I_n)=\operatorname{Ker}(R_2-\sqrt{\lambda}I_n)$

Donc $\forall X\in\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)$, $R_1X=R_2X$ or $\bigoplus\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}A}\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)=\mathbb{R}^n$, donc $R_1=R_2$, l'unicité en découle.

Existence et calcul d'une racine carrée

4) L'égalité $U^2=T$ est équivalente à $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$, $t_{i,j}=\sum\limits_{p=1}^{n}u_{i,p}u_{p,j}$.

En tenant compte que ces matrices sont triangulaires supérieurs ie $\forall i>j$, $t_{ij}=u_{i,j}=0$.

Alors $U^2=T$ est équivalente à $t_{i,i}=\sum\limits_{p=1}^{n}u_{i,p}u_{p,i}=u_{i,i}^2$ et pour $i\neq j$, $t_{i,j}=u_{i,i}u_{i,j}+u_{i,j}u_{j,j}+\sum\limits_{\substack{1\le p\le n\\ i<p<j}}u_{i,p}u_{p,j}$

Donc $U^2=T$ est équivalente au système donné.

T est inversible donc les $t_{p,p}\neq 0$, ces nombres possèdent deux racines carrées opposées de la forme $x_p+iy_p, -x_p-iy_p$ avec $x_p,y_p\in\mathbb{R}$.

Si $x_p>0$, on prend $u_{p,p}=x_p+iy_p$

Si $x_p=0$, on prend $u_{p,p}=i|y_p|$, évidement dans ce cas $|y_p|>0$.

Avec ce choix on aura $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$, $u_{i,i}+u_{j,j}\neq 0$.

On retrouve le terme général de U, en donnant à j les valeurs $i+1, i+2, \dots$, dans la 2 emme équation du système.

5) χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$, donc A est trigonalisable, alors $\exists P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\exists T$ triangulaire supérieure à termes diagonaux non nulles puisque A est inversible telle que $A=PTP^{-1}$.

par application de la question précédente $\exists U\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $U^2=T$, alors $(PUP^{-1})^2=PU^2P^{-1}=PTP^{-1}=A$, donc A possède une racine carrée.

Si on suppose que les valeurs propres de A sont dans $\overline{\mathbb{C}}$, alors tous les $t_{j,j}\in\overline{\mathbb{C}}$, soit alors $j\in\{1,\dots,n\}$, posons $t_{j,j}=r_je^{i\theta_j}$ avec $\theta_j\in]-\pi,\pi[$, alors $\sqrt{r_j}e^{i\frac{\theta_j}{2}}$ est une racine carrée de $t_{j,j}$ de partie réelle strictement positive, on prend $u_{j,j}=\sqrt{r_j}e^{i\frac{\theta_j}{2}}$.

Donc A possède une racine carrée dont les valeurs propres sont strictement positive.

C. Algorithme de Newton

6) Soit $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, alors

$$\begin{array}{rcl}
\|AB\|^2 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(AB)_{i,j}|^2 \\
& \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{n} |a_{i,p}||b_{p,j}|\right)^2 \\
& \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{n} |a_{i,p}|^2\right)\left(\sum_{p=1}^{n} |b_{p,j}|^2\right) \text{ c'est l'inégalité de Cauchy} \\
& \leq & \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} |a_{i,p}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} |b_{p,j}|^2\right) \\
& \leq & \|A\|^2\,\|B\|^2
\end{array}$$

Alors $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

7) Puisqu'on est dans $\mathbb{C}$ posons $m_A = \displaystyle\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}A} (X-\lambda)^{n_\lambda}$, alors $\det(m_A(B)) = \displaystyle\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}A} \det(B-\lambda I_n)^{n_\lambda}$. Donc

$m_A(B)$ est inversible si et seulement si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}A,\ \det(B-\lambda I_n) \neq 0$ si et seulement si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}A,\ \lambda \notin \mathrm{Sp}B$ si et seulement si $\mathrm{Sp}A \cap \mathrm{Sp}B = \emptyset$.

Supposons $\exists M \neq 0$ telle que $AM = MB$, par récurrence $\forall p \in \mathbb{N},\ A^pM = MB^p$, donc $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)M = MP(B)$.

En particulier $m_A(A)M = Mm_A(B)$, donc $Mm_A(B) = 0$, donc $m_A(B)$ ne peut pas être inversible car $M \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}A \cap \mathrm{Sp}B = \emptyset$.

8) Supposons que $\mathrm{Sp}A \cap \mathrm{Sp}B \neq \emptyset$, alors $m_A(B)$ est non inversible d'après ce qui précède alors $m_A({}^tB)$ est non inversible, alors $\mathrm{Sp}A \cap \mathrm{Sp}\,{}^tB \neq \emptyset$.

Remarque On peut le faire directement car $\mathrm{Sp}B = \mathrm{Sp}\,{}^tB$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}A \cap \mathrm{Sp}\,{}^tB$, alors $\exists X, Y$ des vecteurs colonnes non nuls ; $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \lambda Y$, alors $AX\,{}^tY = \lambda X\,{}^tY$ et $X\,{}^tYB = \lambda X\,{}^tY$, la matrice carrée $M = X\,{}^tY$ est non nulle car elle possède au moins un terme non nulle et vérifie bien $AM = MB$.

9) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $F(X+H) - F(X) = XH + HX + H^2$.

L'application $X \longmapsto XH + HX$ est linéaire et $\left\|H^2\right\| \leq \|H\|^2$ par la question 6, alors $H^2 = o(\|H\|)$, donc F est différentiable en $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est $dF_X(H) = XH + HX$.

$\mathrm{Ker}(dF_X) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ /\ XH + HX = 0\}$ et on a dF_X est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(dF_X) = \{0\}$ car dF_X est un endomorphisme sur un espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie.

Supposons que $\mathrm{Sp}(X)\cap\mathrm{Sp}(-X)\neq\emptyset$, alors $\exists H\neq 0$ telle que $XH = H(-X)$ c'est la question 8, donc $\mathrm{Ker}(dF_X)\neq\{0\}$, donc dF_X est non inversible.

Réciproquement si dF_X est non inversible, alors $\exists H\neq 0$ telle que $XH = H(-X)$, donc $\mathrm{Sp}(X)\cap\mathrm{Sp}(-X)\neq\emptyset$ c'est la question 7.

Donc dF_X est non inversible si et seulement si $\mathrm{Sp}(X)\cap\mathrm{Sp}(-X)\neq\emptyset$.

Donc dF_X est inversible si et seulement si $\mathrm{Sp}(X)\cap\mathrm{Sp}(-X)=\emptyset$.

Supposons qu'il existe $x\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\backslash\{0\}$, tel que $X(x)=0$, alors $-X(x)=0$, donc, $0\in\mathrm{Sp}(X)\cap\mathrm{Sp}(-X)$ ce qui est absurde. Donc X est inversible.

10) Les valeurs propres de $\sqrt{A}$ sont de partie réelle strictement positive, donc $\mathrm{Sp}(X)\cap\mathrm{Sp}(-X)\neq\emptyset$ et par application de la question 9, dF_{X^*} est inversible.

L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; $X\longmapsto X^2-A$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car ses composantes le sont sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors l'application :

$D\colon\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\longrightarrow\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$; $X\longmapsto dF_X$ est continue.

L'application det étant aussi continue, alors $\varphi=\det\circ D$ est continue, comme $\varphi(X^*)=\det(dF_{X^*})\neq 0$ car dF_{X^*} est inversible alors φ est non nulle sur tout un voisinage de X^*, par conséquent $\exists r>0$ tel que $\forall X\in\overline{B}(X^*,r)$, dF_X est inversible.

Remarque : C'est facile de vérifier que $\forall X,Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $dF_{X+\lambda Y} = dF_X+\lambda dF_Y$, donc l'application $D\colon X\longmapsto dF_X$ est continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension fini.

11) On a $F(X^*)={X^*}^2-A=0$ par définition de X^*, donc $G(X^*)=X^*$.

Pour montrer l'égalité donnée on montre que $dF_{X^*+H}\big(G(X^*+H)-G(X^*)\big)=H^2$ puisque $X^*+H\in B(X^*,r)$ et dans ce cas dF_{X^*+H} est inversible. On a :

$$\begin{aligned}
dF_{X^*+H}\big(G(X^*+H)-G(X^*)\big) &= dF_{X^*+H}\big(G(X^*+H)\big)-dF_{X^*+H}\big(G(X^*)\big)\\
&= dF_{X^*+H}(X^*+H)-F(X^*+H)-dF_{X^*+H}(X^*)\\
&= dF_{X^*+H}(H)-F(X^*+H)\ \text{car} dF_{X^*+H}\text{ est linéaire}\\
&= (X^*+H)H+H(X^*+H)-(X^*+H)^2+A\\
&= H^2\ \text{Calcul}
\end{aligned}$$

Pour montrer l'égalité donné on inverse et on montre $dF_{X^*+H}=dF_{X^*}+dF_H$ égalité évidente et on conclut par l'inverse car dans ce cas dF_{X^*+H} et dF_{X^*} sont inversibles.

12) Les applications $X\longmapsto dF_X$ et $g\longmapsto g^{-1}$ sont continues, par composition l'application $\varphi\colon\ X\longmapsto(dF_X)^{-1}$.

Sur l'espace $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$ on définit une norme par $|||L||| = \sup\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|L(X)\|}{\|X\|}$ où $L \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$.(C'est hors programme).

Alors $\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$; $\|L(H)\| \leq |||L|||\,\|H\|$.

φ est continue et $\overline{B}(X^*,r)$ est un compact donc $\varphi(\overline{B}(X^*,r))$ est un compact alors $\exists C>0$, $\forall X \in \overline{B}(X^*,r)$, $|||\varphi(X)||| = |||(dF_X)^{-1}||| \leq C$. Donc

$\forall X \in \overline{B}(X^*,r)$; $\left\|G(X)-X^*\right\| = \left\|G(X)-G(X^*)\right\| \leq |||(dF_X)^{-1}|||\,\left\|X-X^*\right\|^2$ par la question 11 et 6.

Donc $\forall X \in \overline{B}(X^*,r)$; $\left\|G(X)-X^*\right\| \leq C\left\|X-X^*\right\|^2$

13) On ignore la comparaison du nombre C et de 1, donc l'inégalité donnée n'est sûrement vraie pour $k=0$.

$$\boxed{\text{Peut être on doit montrer que } \forall k\in\mathbb{N}, \left\|X_k-X^*\right\| \leq \frac{(\rho\sqrt{C})^{2^{k+1}}}{C}}$$

Sous les conditions $0<\rho<\min(1,\dfrac{1}{\sqrt{C}},\dfrac{r}{\sqrt{C}})$ $(*)$, on a

$\forall k\in\mathbb{N}^*$; $\dfrac{(\rho\sqrt{C})^{2^{k+1}}}{C} = (\rho\sqrt{C})^{2^k}\dfrac{(\rho\sqrt{C})^2}{C} < \rho\sqrt{C}\rho < r$, car $(*)$

L'inégalité donné est vraie pour $k=0$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$ supposons que $\left\|X_k-X^*\right\| \leq \dfrac{(\rho\sqrt{C})^{2^{k+1}}}{C}$, alors $\left\|X_k-X^*\right\| \leq r$ donc $X_k \in B(X^*,r)$ et on peut calculer $G(X_k)$, de plus ;

$\left\|X_{k+1}-X^*\right\| = \left\|G(X_k)-X^*\right\| \leq C\left\|X_k-X^*\right\|^2 \leq C\dfrac{(\rho\sqrt{C})^{2^{k+2}}}{C^2} \leq \dfrac{(\rho\sqrt{C})^{2^{k+2}}}{C}$.

La récurrence s'applique et le résultat est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$.

De plus $\rho\sqrt{C}<1$ avec la condition donné et par conséquent $\lim\limits_{k\to+\infty} X_k = X^*$. La suite $(X_k)_k$ converge vers X^* l'un des points fixe de F.

Forme équivalente

14) Supposons que $(X_k)_k$ est bien définie, alors $\forall k\in\mathbb{N}$, dF_{X_k} est inversible.

Montrons que la suite $(U_k)_k$ est bien définie et que $\forall k\in\mathbb{N}$, $U_k=X_k$.

La relation est vérifié pour $k=0$.

Soit $k\in\mathbb{N}$, supposons que $U_k=X_k$, montrons que $U_{k+1}=X_{k+1}$.

On a alors $dF_{U_k}=dF_{X_k}$ qui est inversible, alors **I** donne $dF_{U_k}(H_k)=A-U_k^2$ donc $H_k=(dF_{U_k})^{-1}(A-U_k^2) = -(dF_{U_k})^{-1}(F(U_k)) = U_{k+1}-U_k$, donc $U_{k+1}=U_k-(dF_{U_k})^{-1}(F(X_k)) = X_k-(dF_{X_k})^{-1}(F(X_k)) = X_{k+1}$.

Réciproquement : Supposons que la suite $(U_k)_k$ est bien définie par $X_0 = U_0$ et la relation **I** et montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, X_k est bien définie et $X_k = U_k$.

La relation est vraie pour $k = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $X_k = U_k$, l'équation $U_k H_k + H_k U_k = A - U_k^2$ s'écrit $dF_{U_k}(H_k) = A - U_k^2$ qui possède une unique solution $H_k = U_{k+1} - U_k$, donc dF_{U_k} est inversible, donc $X_{k+1} = X_k - (dF_{X_k})^{-1}(F(X_k)) = Uk - (dF_{U_k})^{-1}(F(U_k)) = U_{k+1}$.

D'où le résultat.

15) Les conditions de la question 14 sont vérifiées, donc $\forall k \in \mathbb{N}, \quad dF_{X_k}$ est inversible, d'après la question 9 la matrice X_k est inversible et $X_k = U_k$, donc U_k est inversible.

Montrons par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}$, V_k est bien définie et que $V_k = U_k$.

La relation est vérifié pour $k = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $V_k = U_k$ commute ave A, alors V_k existe et inversible de plus $V_{k+1} = \frac{1}{2}(V_k + V_k^{-1}A)$ existe, reste à montrer que $V_{k+1} = U_{k+1}$. On a

$$\begin{aligned} U_k G_k + G_k U_k &= \frac{1}{2}U_k(U_k^{-1}A - U_k) + \frac{1}{2}(U_k^{-1}A - U_k)U_k \\ &= A - U_k^2 \text{ car } AU_k = U_k A \end{aligned}$$

Donc $U_{k+1} = U_k + G_k = U_k + \frac{1}{2}(V_k + V_k^{-1}A) = V_k + \frac{1}{2}(V_k^{-1}A - V_k) = \frac{1}{2}(V_k + V_k^{-1}A) = V_{k+1}$. Puisque $V_k A = AV_k$, alors $AV_k^{-1} = V_k^{-1}A$, donc $V_{k+1}A = AV_{k+1}$.

16) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \exists \lambda_{k,i} > 0,\ /\ V_k(e_i) = \lambda_{k,i} e_i$.

Pour $k = 0$ la relation est vérifiée. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \exists \lambda_{k,i} > 0,\ /\ V_k(e_i) = \lambda_{k,i} e_i$, alors $V_k^{-1}(e_i) = \frac{1}{\lambda_{k,i}} e_i$:

V_k est diagonalisable dans une BON donc symétrique et définie positif car ses valeurs propres sont > 0, donc V_k est inversible et

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, V_{k+1}(e_i) = \frac{1}{2}(V_k(e_i) + V_k^{-1}A(e_i)) = \frac{1}{2}(\lambda_{k,i} e_i + V_k^{-1}(\lambda_i e_i)) = \frac{1}{2}(\lambda_{k,i} e_i + \frac{\lambda_i}{\lambda_{k,i}} e_i)$ qu'on peut écrire sous forme $V_{k+1}(e_i) = \lambda_{k+1,i} e_i$ avec

$\lambda_{k+1,i} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{k,i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{k,i}}\right) > 0$ et le résultat est vraie pour $k + 1$.

17) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{1, ..., n\}$ alors :

$$\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{k,\ell} + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_{k,\ell}}\right) - \sqrt{\lambda_\ell} = \frac{1}{2\lambda_{k,\ell}}\left(\lambda_{k,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}\right)^2$$

et $\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{k,\ell} + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_{k,\ell}}\right) + \sqrt{\lambda_\ell} = \frac{1}{2\lambda_{k,\ell}}\left(\lambda_{k,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}\right)^2$

Donc $\dfrac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\dfrac{\lambda_{k,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^2$

La relation demandée est évidente pour $k = 0$ car $V_0 = \mu I_n$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons qu'elle vraie pour k, alors

$\dfrac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\dfrac{\lambda_{k,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^2 = \left[\left(\dfrac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^k}\right]^2$ c'est l'hypothèse de récurrence, et la relation est donc vérifié à l'ordre $k+1$

18) Les λ_k et μ sont strictement positifs, alors $|\mu - \sqrt{\lambda_\ell}| < \mu + \sqrt{\lambda_\ell}$, donc le rapport $\left[\dfrac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right]^{2^k}$ tend vers 0 à l'infini.

Donc $\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}$ tend vers 0 à l'infini, car $\dfrac{|\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}|}{\sqrt{\lambda_\ell}} \leq \dfrac{|\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}|}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}}$.

Or $V_k = P\text{diag}(\lambda_{k,1}, ..., \lambda_{k,n})^t P$, donc par continuité de l'application $M \longmapsto PM^tP$, $\lim\limits_{k \to +\infty} V_k = P\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})^t P$ et on a $[P\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})^t P]^2 = A$, alors $(V_k)_k$ converge vers l'unique racine carrée de A.

Stabilité

19) On calcul pour cela $(V_0 + \Delta)(V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}) = I_n - \Delta V_0^{-1} + \Delta V_0^{-1} + \Delta V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}$.

On doit montrer que $(\Delta V_0^{-1})^2 = 0$. On a $\Delta V_0^{-1}\Delta V_0^{-1} = \varepsilon \Delta V_0^{-1} C_i C_j^T V_0^{-1}$.

Or pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ C_i est un vecteur propre de $V_0 = \sqrt{A}$ associé à la valeur propre $\sqrt{\lambda_i}$, donc $V_0 C_i = \sqrt{\lambda_i} C_i$, alors $V_0^{-1} C_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} C_i$ donc $(\Delta V_0^{-1})^2 = \dfrac{\varepsilon^2}{\sqrt{\lambda_i}} C_i C_j^T C_i C_j^T V_0^{-1} = 0$ car $C_j^T C_i = 0$ puisque les colonnes de P forment une BON de $\mathbb{R}^n$.

Alors $(V_0 + \Delta)(V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}) = I_n$ donc $V_0 + \Delta$ est inversible et l'égalité demandée

On alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{V_1} &= \frac{1}{2}(\widehat{V_0} + \widehat{V_0}^{-1}A) \\
&= \frac{1}{2}(V_0 + \Delta + (V_0 + \Delta)^{-1}A) \\
&= \frac{1}{2}(V_0 + \Delta + (V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1})A) \\
&= \frac{1}{2}(V_0 + \Delta + V_0^{-1}V_0^2 - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A) \text{ car } A = V_0^2 \\
&= V_0 + \frac{1}{2}(\Delta - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A)
\end{aligned}$$

Et $V_1 = \frac{1}{2}(V_0 + V_0^{-1}A) = V_0$ pour les mêmes raisons. Donc $\Delta_1 = \widehat{V_1} - V_1 = \frac{1}{2}(\Delta - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A)$.

20) On montre par récurrence que $\exists \eta \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}, \widehat{V_k} = V_0 + \eta^k \Delta$.
L'égalité est vraie pour $k = 0$, c'est la définition de $\widehat{V_0}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ supposons que le résultat est vraie à l'ordre k, alors
$\widehat{V_{k+1}} = \frac{1}{2}(\widehat{V_k} + \widehat{V_k}^{-1}A)$
Par application de la première équation de la question 19, on obtient $\widehat{V_k}^{-1} = V_0^{-1} - \eta^k V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}$.
Or $V_0^{-1}C_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}C_i$ et $C_j^T V_0 = (V_0 C_j)^T$ car V_0 est symétrique, donc $C_j^T V_0 = (V_0 C_j)^T = \sqrt{\lambda_j} C_j^T$. Alors

$$\begin{aligned}
\widehat{V_{k+1}} &= \frac{1}{2}(V_0 + \eta^k\Delta + (V_0^{-1} - \eta^k V_0^{-1}\Delta V_0^{-1})A) \\
&= \frac{1}{2}(V_0 + \eta^k\Delta + V_0^{-1}A - \eta^k V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A) \\
&= V_0 + \frac{1}{2}(\eta^k\Delta - \eta^k V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A)
\end{aligned}$$

Mais $V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A = \varepsilon V_0^{-1}C_i C_j^T V_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_i}}C_i C_j^T V_0 = \frac{\varepsilon\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}}C_i C_j^T = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\Delta$
Donc $\widehat{V_{k+1}} = V_0 + \frac{\eta^k}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right)\Delta$. Donc si on prend $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right) = \eta$, on obtient $\widehat{V_{k+1}} = V_0 + \eta^{k+1}\Delta$.

21) $(\widehat{V_k})_k$ converge si et seulement si $|\eta| < 1$.

Cette condition est équivalente à $\dfrac{1}{2}\left|1-\sqrt{\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right| < 1$.

Donc si le conditionnement est inférieur à 9 alors la suite $(\widehat{V_k})_k$ converge et vers $V_0 = \sqrt{A}$ à l'infini.

Pour vos remarques ... sadikoulmeki@gmail.com