

# CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE MATH 1 DE L'X 2009

## Première partie

- (1) Soit  $g(t) = f(e^t x)$  alors  $g'(t) = x e^t f'(e^t x)$  d'où  $g'(0) = x f'(x) = (Af)(x)$ .  
 (2) Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $f(x) = x^p$  alors, par une récurrence immédiate,  $(A^n f)(x) = p^n x^p$  d'où

$$\frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) = \frac{(pt)^n}{n!} x^p$$

qui est le terme général d'une série exponentielle convergente. On a alors

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) = e^{pt} x^p = (e^t x)^p = (\Phi_t f)(x).$$

Par linéarité, cette propriété s'étend aux polynômes.

- (3) Immédiat :  $(D^n X)(f)(x) = (xf(x))^{(n)} = xf^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x) = (XD^n + nD^{n-1})(f)(x)$ .  
 (4) Pour  $n = 1$  on sait que  $A = XD$ , on procède alors par récurrence sur  $n$  avec  $\mu_{1,1} = 1$ .  
 Supposons la propriété vraie à l'ordre  $n$ ,

$$\begin{aligned} (A^{n+1}f)(x) &= A \left( \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} X^k D^k \right) (f)(x) \\ &= x \left( \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \right)' \\ &= \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} k x^k f^{(k)}(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^{k+1} f^{(k+1)}(x)}_{= \sum_{k=2}^{n+1} \mu_{n,k-1} x^k f^{(k)}(x)}. \end{aligned}$$

On obtient la formule à l'ordre  $n + 1$  en posant  $\mu_{n+1,1} = \mu_{n,1}$ ,  $\mu_{n+1,n+1} = \mu_{n,n}$  et  $\mu_{n+1,k} = k\mu_{n,k} + \mu_{n,k-1}$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .

On déduit de ceci les relations  $\mu_{n,1} = 1$  et  $\mu_{n,n} = 1$ .

- (5) On applique le résultat du **2** avec la formule du **4** :

$$\begin{aligned} f(e^t x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \right) \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \right) \end{aligned}$$

et il suffit de permuter les sommes.

Compte tenu là aussi de la linéarité de la formule, il suffit de prouver le résultat pour  $f(x) = x^p$ .

Soit  $u_{n,k} = \begin{cases} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \frac{p!}{(p-k)!} x^p & \text{si } k \leq \min(n, p) \\ 0 & \text{si } k > \min(n, p) \end{cases}$ .  $u_{n,k} \geq 0$ ,  $\sum_k u_{n,k}$  et  $\sum_n \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}$  convergent aussi donc on peut appliquer le théorème d'interversion des sommations :

$$\begin{aligned} f(e^t x) &= f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} \right) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n \geq k}^{+\infty} u_{n,k} \right) \\ &= f(x) + \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{n \geq k} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

(6) C'est du cours !

(7) (a) On a  $\lim_{t \rightarrow 0} |(e^t - 1)x| = 0$  d'où l'existence d'un réel  $\gamma_x$  tel que

$$|t| < \gamma_x \Rightarrow |(e^t - 1)x| < R - |x|.$$

On peut aussi utiliser l'inégalité  $|e^t - 1| \leq e^{|t|} - 1$  obtenue par exemple en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle puis raisonner par équivalences en supposant  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned} |(e^{|t|} - 1)x| < R - |x| &\Leftrightarrow e^{|t|} - 1 < \frac{R - |x|}{|x|} = \frac{R}{|x|} - 1 \\ &\Leftrightarrow e^{|t|} < \frac{R}{|x|} \Leftrightarrow |t| < \ln \frac{R}{|x|} = \gamma_x \end{aligned}$$

avec  $\gamma_x > 0$  car  $|x| < R$  (et  $\gamma_0$  peut prendre n'importe quelle valeur positive). Ceci fournit explicitement une valeur de  $\gamma_x$ .

(b) On applique la propriété rappelée avec  $h = e^t x - x = (e^t - 1)x$ ,  $|h| < R - |x|$  :

$$f(x + h) = f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(e^t - 1)^k}{k!} x^k f^{(k)}(x).$$

Or  $e^t - 1$  est D.S.E., de rayon infini, il en est de même pour  $\frac{(e^t - 1)^k}{k!}$  :

$$\frac{(e^t - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k}$$

et on remarque que  $\lambda_{n,k} = 0$  si  $n < k$  (on peut mettre  $t^k$  en facteur) et les  $\lambda_{n,k}$  ne dépendent pas de  $f$ .

(c) Pour  $f(x) = x^p$  on obtient 2 développements de  $f(e^t x)$  :

$$f(x) + \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{n \geq k} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x) = f(x) + \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x)$$

avec  $f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k} & \text{si } k \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . En faisant la différence et en simplifiant

par  $p!x^p$  que l'on peut supposer non nul, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{t^n}{n!} \sum_{k=1}^p (\mu_{n,k} - \lambda_{n,k}) \frac{1}{(p-k)!} \right) = 0$$

(on a rajouté les termes nuls pour  $n < k$ ). Compte tenu de l'unicité du développement en série entière, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{k=1}^p (\mu_{n,k} - \lambda_{n,k}) \frac{1}{(p-k)!} = 0. \quad (\text{R})$$

- Si  $p = 1$  alors  $\mu_{n,1} = \lambda_{n,1}$  pour tout  $n$ .
- Par récurrence sur  $p$ , supposons prouvé les égalités  $\mu_{n,p} = \lambda_{n,p}$  pour tout  $n$ . On écrit la relation (R) pour  $p+1$ , les  $p$  premiers termes sont nuls vu l'hypothèse de récurrence, il ne reste plus que  $(\mu_{n,p+1} - \lambda_{n,p+1}) \frac{1}{(p+1-k)!} = 0$  donc  $\lambda_{n,p+1} = \mu_{n,p+1}$ .

(d) On utilise la relation de récurrence du 4 :  $\lambda_{n+1,k} = k\lambda_{n,k} + \lambda_{n,k-1}$  et on fait une récurrence sur  $n$  :

- pour  $n = 1$ ,  $\lambda_{1,1} = 1 \leq 2$  et  $\lambda_{1,k} = 0$  pour  $k > 1$ .
- On suppose qu'à l'ordre  $n$ ,  $\lambda_{n,k} \leq \frac{2^n n!}{(k-1)!}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - On a  $\lambda_{n+1,1} = 1 \leq 2^{n+1}(n+1)!$  et  $\lambda_{n+1,n+1} = 1 \leq 2^{n+1} \frac{(n+1)!}{n!}$  (majorations larges !).
  - Si  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  alors

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1,k} &\leq k \frac{2^n n!}{(k-1)!} + \frac{2^n n!}{(k-2)!} = \frac{2^n}{(k-1)!} (2k-1) \\ &\leq \frac{2^n n!}{(k-1)!} \times 2n \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

(e) On prend  $\eta = \frac{1}{2}$  et  $\alpha = \frac{R}{2}$  alors

$$\begin{aligned} |Z_{n,k}| &\leq \frac{|t|^n}{n!} \times \frac{2^n n!}{(k-1)!} |x|^k |f^{(k)}(x)| \\ &\leq (2|t|)^n \times \frac{|x|^k |f^{(k)}(x)|}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Or  $\sum_n |Z_{n,k}|$  converge, de somme  $\frac{1}{1-2|t|} \times \frac{|x|^k |f^{(k)}(x)|}{(k-1)!}$  et on sait (question 6) que

$\sum \frac{x^k f^{(k)}(a)}{k!}$  et  $\sum k \frac{x^k f^{(k)}(a)}{k!}$  ont même rayon de convergence (en l'occurrence  $R -$

$|a|$ ). Avec  $a = x$  on en déduit que  $\sum \frac{|x|^k |f^{(k)}(x)|}{(k-1)!}$  converge pour  $|x| < \frac{R}{2}$ .

(f) Si  $|t| < 1/2$  alors  $|e^t - 1| < 1/2$  et  $|(e^t - 1)x| < \frac{R}{2} < R - |x|$ , on peut alors utiliser le résultat de la question 7.b :

En appliquant le théorème d'interversion des sommations, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} Z_{n,k} \right) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{n,k} \right) \\ &= f(e^t x) = (\Phi_t f)(x). \end{aligned}$$

## Deuxième partie

- (8) Soit  $M_k(f) = \sup_{\mathbb{R}} |x^k f(x)|$  alors au voisinage de l'infini,  $|x^k f(x)| \leq \frac{M_{k+2}}{x^2}$  par conséquent  $x \mapsto x^k f(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  (elle est localement intégrable car continue).
- (9) (a) Là encore, le problème se pose au voisinage de  $+\infty$  :

$$\begin{aligned} |y^2 g(y)| &\leq M_1(g) \\ |f(x-y)| &\leq M_0(f) \end{aligned}$$

On a ainsi, au voisinage de l'infini,  $|f(x-y)g(y)| \leq \frac{M_1(g)M_0(f)}{y^2}$  et, par domination,  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

- (b) Montrons que  $f * g$  est continue :

- $y \mapsto f(x-y)g(y)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,
- $x \mapsto f(x-y)g(y)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x-y)g(y)| \leq M_0(f)|g(y)| \in L^1(\mathbb{R})$

donc, en vertu du théorème de continuité sous l'intégrale,  $f * g$  est continue.

Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{F}$  alors

$$\begin{aligned} \left| x^k \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (x-y+y)^k f(y)g(x-y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (x-y)^{k-p} g(x-y) \times y^p f(y) dy \right| \\ &\leq \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} M_{k-p}(g) \int_{\mathbb{R}} y^p f(y) dy, \end{aligned}$$

car  $y \mapsto y^p f(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .  $x^k f * g(x)$  est bornée pour tout  $k$  et  $f * g$  est continue donc  $f * g \in \mathcal{F}$ .

On a, en appliquant Fubini

$$\begin{aligned} m_k(f * g) &= \int_{\mathbb{R}} x^k \left( \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy \right) dx \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} y^p f(y) \times (x-y)^{k-p} g(x-y) dy \right) dx \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} y^p f(y) \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}} (x-y)^{k-p} g(x-y) dx \right)}_{=m_{k-p}(g)} dy \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} m_p(f) m_{k-p}(g). \end{aligned}$$

On a pu appliquer Fubini ici car, en posant  $M'_p(f) = M_{p+2}(f) + M_p(f)$ , on a

- $y \mapsto y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y)$  est borné par  $M_{k-p}(g)|y^p f(y)|$  donc intégrable sur  $\mathbb{R}$ ,
- $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y) dy$  est intégrable car elle est majorée par  $\int_{\mathbb{R}} \frac{M'_p(f)}{y^2+1} \times \frac{M'_{k-p}(g)}{(x-y)^2+1} dy = M'_p(f) \cdot M'_{k-p}(g) \frac{2\pi}{x^2+4}$  qui est intégrable (merci MAPLE).

Il nous faut aussi l'intégration en intervertissant les variables :

- $x \mapsto y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y)$  est intégrable car on peut la majorer par  $M_p(f) \times |x-y|^{k-p} |g(x-y)|$  qui est intégrable car majorée par  $\frac{M'_{k-p}(g)}{(y-x)^2 + 1}$ ,
- $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y) dx = y^p f(y) \int_{\mathbb{R}} u^{k-p} g(u) du$  qui est aussi intégrable.

OUF !

- (10) • On sait que  $m_0(f_1 * f_2) = m_0(f_1) \cdot m_0(f_2) = 1$  (formule du **9.b**) et par une récurrence immédiate,  $m_0(f_1 * \dots * f_n) = 1$ .
- Avec la même formule,  $m_1(f_1 * f_2) = m_1(f_1) \cdot m_0(f_2) + m_0(f_1) \cdot m_1(f_2) = 0$  et, par récurrence et associativité de  $*$ ,  $m_1(f_1 * \dots * f_n) = 0$  (en fait  $\mathcal{F}_0$  est stable par  $*$ ).
- $m_2(f_1 * f_2) = m_0(f_1)m_2(f_2) + 2m_1(f_1)m_1(f_2) + m_2(f_1)m_0(f_2) = m_2(f_1) + m_2(f_2)$ . Par récurrence, on suppose que  $m_2(f_1 * \dots * f_n) = m_2(f_1) + \dots + m_2(f_n)$  alors

$$\begin{aligned} m_2[(f_1 * \dots * f_n) * f_{n+1}] &= m_0(f_1 * \dots * f_n)m_2(f_{n+1}) + 2m_1(f_1 * \dots * f_n)m_1(f_{n+1}) \\ &\quad + m_2(f_1 * \dots * f_n)m_0(f_{n+1}) \\ &= m_2(f_{n+1}) + m_2(f_1) + \dots + m_2(f_n) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

(11) Immédiat :  $m_k(T_a(f)) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(ax) d(ax) = \frac{1}{a^k} m_k(f)$ .

(12) (a) On a  $m_2(T_n F_n) = \frac{1}{n^2} m_2(F_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n m_2(f_i) \leq \frac{C}{n} \rightarrow 0$  puis

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx \leq \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 (T_n F_n)(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} m_2(T_n F_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc  $\int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx \rightarrow 0$ .

C'est exactement pareil avec  $\int_{-\infty}^{-\alpha} (T_n F_n)(x) dx$ .

(b) Supposons donc dans un premier temps que  $h(0) = 0$ .

- Choisissons  $\alpha$  pour que  $|h(x)| \leq \varepsilon/2$  dès que  $|x| \leq \alpha$ ,
- $N \in \mathbb{N}$  pour que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \times \int_{|x| \geq \alpha} (T_n F_n)(x) dx \leq \varepsilon/2$  dès que  $n \geq N$ .

Alors, pour tout  $n \geq N$ , en remarquant que  $\int_{\mathbb{R}} (T_n F_n)(x) dx = 1$  et que  $T_n F_n(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x) dx \right| &\leq \left| \int_{|x| \leq \alpha} h(x)(T_n F_n)(x) dx \right| + \left| \int_{|x| \geq \alpha} h(x)(T_n F_n)(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x| \leq \alpha} (T_n F_n)(x) dx + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \int_{|x| \geq \alpha} (T_n F_n)(x) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x) dx = 0$ .

Si  $h(0) \neq 0$ , on remplace  $h$  par  $h_0(x) = h(x) - h(0)$  et, par linéarité de l'intégrale,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x) dx = h(0).$$

(13) (a) À l'aide de Cauchy-Schwarz :

$$m_2(f)^2 = \left( \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} x^4 f(x) dx \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) dx}_{=1} \leq m_4(f).$$

(b) Procédons par récurrence sur  $n$  :

$$\begin{aligned} m_4(f_1 * f_2) &= \sum_{p=0}^4 \binom{4}{p} m_p(f_1) m_{4-p}(f_2) \\ &= \underbrace{m_4(f_1) m_0(f_2)}_{=m_4(f_1)} + \underbrace{m_0(f_1) m_4(f_2)}_{=m_4(f_2)} + \underbrace{4 m_3(f_1) m_1(f_2) + m_1(f_1) m_3(f_2)}_{=0} + 6 m_2(f_1) m_2(f_2) \\ &= m_4(f_1) + m_4(f_2) + 6 m_2(f_1) m_2(f_2) \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie à l'ordre 2.

On suppose que cette relation est vérifiée à l'ordre  $n$  :

$$\begin{aligned} m_4(f_1 * \dots * f_{n+1}) &= m_4[(f_1 * \dots * f_n) * f_{n+1}] \\ &= m_4(f_1 * \dots * f_n) + 6 m_2(f_1 * \dots * f_n) m_2(f_{n+1}) + m_4(f_{n+1}) \end{aligned}$$

car  $\mathcal{F}_0$  est stable par  $*$  et qu'on a la propriété à l'ordre 2

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n m_4(f_i) + m_4(f_{n+1}) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i) m_2(f_j) \\ &\quad + 6(m_2(f_1) + \dots + m_2(f_n)) \times m_2(f_{n+1}) \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

(c) Comme  $m_2(f_i) \leq C$  et que la somme  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i) m_2(f_j)$  comporte  $\frac{n(n-1)}{2}$  termes alors

$$m_4(F_n) \leq \sum_{i=1}^n m_4(f_i) + 6C^2 \frac{n(n-1)}{2} \leq \sum_{i=1}^n m_4(f_i) + 3C^2 n^2$$

puis on procède comme au **12.a** :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{+\infty} T_n F_n(x) dx &\leq \int_{\alpha}^{+\infty} \left( \frac{x}{\alpha} \right)^4 (T_n F_n)(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha^4} m_4(T_n F_n) = \frac{1}{\alpha^4} \frac{1}{n^4} m_4(F_n). \end{aligned}$$

Conclusion :  $\sum_{n \geq 1} \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx$  converge si, par exemple,  $\sum_{i=1}^n m_4(f_i) = O(n^2) \dots$