Maths 2 MPI 2010

Abauzit Gabriel

Partie I

1.(a) On effectue successivement les opérations élémentaires suivantes : $L_n \leftarrow L_n - \lambda_1 L_{n-1}, \ldots, L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_1 L_1$.

(b) On procède par récurrence sur n.

• Le cas $n = 1$ est immédiat puisque $V(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
• Soit $n \geqslant 2$ tel que

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\lambda_k - \lambda_j)$$

pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, on développe le déterminant obtenu précédemment selon la première colonne :

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \ldots & \lambda_n - \lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{n-2} & \ldots & (\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = V(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) \prod_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (\lambda_k - \lambda_j)$$

par hypothèse de récurrence.

2. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0$$

En dérivant cette égalité on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^i \alpha_k f_k = 0$$

pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Comme f_k ne s'annule pas pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est solution du système

$$\begin{cases} \alpha_1 & + & \ldots & + & \alpha_n & = & 0 \\ \lambda_1 \alpha_1 & + & \ldots & + & \lambda_n \alpha_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \alpha_1 & + & \ldots & + & \lambda_n^{n-1} \alpha_n & = & 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, il est non nul car $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts. Le système admet donc une unique solution et, comme $(0, \ldots, 0)$ est solution, alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$ donc $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Partie II

1. Soit $y \in \operatorname{Ker} K$, alors $BA^k y = 0$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ donc $y = 0$ d'après $[c]$, d'où $\operatorname{Ker} K = \{0\}$. D'après le théorème du rang $\operatorname{rg} K = N - \dim \operatorname{Ker} K = N$.

2. Supposons qu'il existe y un vecteur propre de A dans le noyau de B. Soient $y \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $Ay = \lambda y$ et $By = 0$. Alors $BA^k y = \lambda^k By = 0$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ donc $Ky = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} K \neq \{0\}$ et d'après le théorème du rang $\operatorname{rg} K = N - \dim \operatorname{Ker} K \leqslant N - 1$ ce qui contredit $[d]$.

3.(a) Soit $k \geqslant N$, la division euclidienne de X^k par χ_A s'écrit $X^k = \chi_A Q_k + P_k$ avec $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $P_k \in \mathbb{C}_{N-1}[X]$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$ donc $A^k = P_k(A)$. (Notons que le résultat reste vrai pour $k \leqslant N-1$ en posant $P_k = X^k \in \mathbb{C}_{N-1}[X]$).

(b) Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ tel que $BA^k y = 0$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, alors $BA^k y = BP_k(A)y = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $P_k \in \mathbb{C}_{N-1}[X]$ donc l'application $t \mapsto B \exp(At) y$ est identiquement nulle, ce qui contredit $[b]$.

4. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A. A est diagonalisable donc

$$\mathbb{C}^N = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_N)$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $y_i \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_N)$, alors $A^k y_i = \lambda_i^k y_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc $\exp(At) y_i = e^{\lambda_i t} y_i$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. Soit $y \in \mathbb{C}^N$ tel que $B \exp(At) y = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, il existe $y_1, \ldots, y_n$ tel que $y = \sum_{i=1}^n y_i$ avec $y_i \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_N)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 = B \exp(At) y = \sum_{i=1}^{n} B \exp(At) y_i = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} B y_i$$

La famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre d'après la question **2** de la partie **I** donc $B y_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Si y était non nul, il existerait $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $y_i \neq 0$, par suite y_i serait un vecteur propre de A dans le noyau de B ce qui contredit $[a]$, donc $y = 0$.

5. On a montré les implications $[b] \Rightarrow [c] \Rightarrow [d] \Rightarrow [a]$ et dans le cas où A est diagonalisable, on a montré que les propositions $[a]$, $[b]$, $[c]$ et $[d]$ sont équivalentes.

Partie III

1. Soit $X \in \mathbb{C}^N$, alors $\langle AX, X \rangle = {}^t(AX)\overline{X} = {}^tX{}^tA\overline{X} = -{}^tX\overline{AX} = -\langle X, AX \rangle = -\overline{\langle AX, X \rangle}$ donc $\operatorname{Re} \langle AX, X \rangle = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$, alors $\langle AX, X \rangle = \lambda \langle X, X \rangle = \lambda \|X\|^2$ donc $\operatorname{Re}(\lambda)\|X\|^2 = 0$ et comme $X \neq 0$, alors $\|X\| \neq 0$ donc $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ et λ est imaginaire pure.

2. Le système est un problème de Cauchy, il admet donc une unique solution d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit $\varphi(t) = \exp(-(A - B^*B)t)X(t)$, alors φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0, +\infty[, \frac{d\varphi}{dt}(t) &= \exp(-(A - B^*B)t)\frac{dX}{dt}(t) - \exp(-(A - B^*B)t)(A - B^*B)X(t) \\
&= \exp(-(A - B^*B)t)(A - B^*B)X(t) - \exp(-(A - B^*B)t)(A - B^*B)X(t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi φ est constante et

$$\forall t \in [0, +\infty[, X(t) = \exp((A - B^*B)t)\varphi(t) = \exp((A - B^*B)t)\varphi(0) = \exp((A - B^*B)t)X_0$$

3. Soit $t \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle X(t), X(t) \rangle \\
&= \left\langle \frac{dX}{dt}(t), X(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{dX}{dt}(t) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{dX}{dt}(t), X(t) \right\rangle + \overline{\left\langle \frac{dX}{dt}(t), X(t) \right\rangle} \\
&= 2\underbrace{\operatorname{Re}\langle AX(t), X(t) \rangle}_{=0} - 2\operatorname{Re}\underbrace{\langle B^*BX(t), X(t) \rangle}_{=\langle BX, BX \rangle} \\
&= -2\|BX(t)\|^2
\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 \leqslant 0$ donc $t \mapsto \|X(t)\|$ est décroissante. Finalement $\|X(t)\| \leqslant \|X(0)\|$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, c'est à dire $\|\exp((A - B^*B)t)X_0\| \leqslant \|X_0\|$. Ceci valant pour tout $X_0 \in \mathbb{C}^N$, on a $|\!|\!|\exp((A - B^*B)t)|\!|\!| \leqslant 1$.

4. L'application $t \mapsto \|X(t)\|$ est décroissante et minorée par 0 donc admet une limite finie en $+\infty$. Comme de plus $0 \leqslant \|X(t)\| \leqslant \|X_0\|$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $0 \leqslant L \leqslant \|X_0\|$.

5.(a) $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est constante donc $\frac{d}{dt}\|X(t)\|^2$ est nulle donc $\|BX(t)\|^2 = 0$ puis $BX(t) = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ d'après la question **3.**.

(b) $BX(t)=0$ pour tout $t\in[0,+\infty[$ donc $\frac{dX}{dt}(t)=AX(t)$ puis $X(t)=\exp(At)X_0$ pour tout $t\in[0,+\infty[$. De plus $B\exp(At)X_0=BX(t)=0$ pour tout $t\in[0,+\infty[$ donc $t\mapsto B\exp(At)X_0$ est identiquement nulle. Or A est diagonalisable donc **[b]** est vrai d'après la question **4.** de la partie **I**, donc $X_0=0$. Comme de plus $0\leqslant L\leqslant\|X_0\|$, on a $L=0$.

6.(a) La suite $(X(t_{\varphi(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée d'après la question **4.** donc admet une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

(b) Soit $t\in[0,+\infty[$, alors

$$\forall k\in\mathbb{N}, X(t_{\varphi(k)}+t)=\exp((A-B^*B)(t_{\varphi(k)}+t))=\exp((A-B^*B)t)X(t_{\varphi(k)})\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\exp(t(A-B^*B))\xi_0=\xi(t)$$

car $(A-B^*B)t_{\varphi(k)}$ et $(A-B^*B)t$ commutent.

(c) Soit $t\in[0,+\infty[$, $\lim\limits_{k\to+\infty}(t_{\varphi(k)}+t)=+\infty$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\|X(t_{\varphi(k)}+t)\|=L$ d'où $\|\xi(t)\|=L$ par unicité de la limite. On peut alors appliquer la question **5.** à ξ qui fournit $L=0$.

7.(a) Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon_0>0$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante tels que $|||\exp((A-B^*B)t_n)|||\geqslant\varepsilon_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe $y_n\in\mathbb{C}^N$ tel que $\|y_n\|\leqslant 1$ et $\|\exp((A-B^*B)t_n)y_n\|\geqslant\|y_n\|\varepsilon_0$ car la boule unité est compacte en dimension finie, donc la norme d'opérateur est atteinte. Quitte à considérer $\frac{y_n}{\|y_n\|}$ (y_n est non nul), on peut supposer que $\|y_n\|=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ auquel cas $\|\exp((A-B^*B)t_n)y_n\|\geqslant\varepsilon_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc admet une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, soit alors $y_\infty\in\mathbb{C}^N$ et $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}y_{\varphi(n)}=y_\infty$. Par suite, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|\exp((A-B^*B)t_{\varphi(n)})y_\infty\|&\geqslant\|\exp((A-B^*B)t_{\varphi(n)})y_n\|-\|\exp((A-B^*B)t_{\varphi(n)})(y_\infty-y_{\varphi(n)})\|\\&\geqslant\varepsilon_0-\underbrace{|||\exp((A-B^*B)t_{\varphi(n)})|||}_{\leqslant 1}\|y_\infty-y_{\varphi(n)}\|\\&\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}\end{aligned}$$

pour n assez grand, puisque $\|y_\infty-y_{\varphi(n)}\|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$ pour n assez grand. Cela contredit la question **6.(c)** selon laquelle $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\exp((A-B^*B)t_{\varphi(n)})y_\infty\|=0$ (en considérant $X_0=y_\infty$ comme condition initiale).

(b) Soit $k\in[\![1,n]\!]$ et $y_k\in\mathbb{C}^N\setminus\{0\}$ unitaire tel que $My_k=\lambda_k y_k$, alors $\|\exp(Mt)y_k\|=\|e^{\lambda_k t}y_k\|=e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_k)t}\|y_k\|$ d'où

$$e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_k)t}=\frac{\|\exp(Mt)y_k\|}{\|y_k\|}\leqslant|||\exp(Mt)|||\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_k)t}=0$ d'où $\mathrm{Re}\,\lambda_k<0$.

(c) On décompose χ_M sur $\mathbb{C}$:

$$\chi_m=(X-\lambda_1)^{m_1}\dots(X-\lambda_n)^{m_n}$$

avec $m_1,\dots,m_n\in\mathbb{N}^*$. D'après le lemme des noyaux on a :

$$\mathbb{C}^N=\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Ker}(M-\lambda_i I_N)^{m_i}$$

Soit $i\in[\![1,n]\!]$ et $y_i\in\mathrm{Ker}(M-\lambda_i I_N)^{m_i}$, alors pour tout $t\in[0,+\infty[$,

$$\exp((M-\lambda_i I_N)t)y_i=\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{t^k}{k!}(M-\lambda_i I_N)^k y_i=Q_i(t)y_i$$

avec $Q_i=\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{X^k}{k!}(M-\lambda_i I_N)^k$. Par suite, comme M et $\lambda_i I_N$ commutent, on a :

$$\exp(Mt)y_i=\exp(\lambda_i I_N t)\exp((M-\lambda_i I_N)t)y_i=e^{\lambda_i t}Q_i(t)y_i$$

Soit $y\in\mathbb{C}^N$, il existe $y_1,\dots,y_n$ tels que $y=\sum_{i=1}^n y_i$ et $y_i\in\mathrm{Ker}(M-\lambda_i I_N)^{m_i}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. Par suite

$$\|\exp(Mt)y\|=\left\|\sum_{i=1}^n\exp(Mt)y_i\right\|=\left\|\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t}Q_i(t)y_i\right\|\leqslant\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|y_i\|\right)\sum_{i=1}^n e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_i)t}\|Q_i(t)\|$$

Notons tout d'abord que $y \mapsto \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|y_i\|$ est une norme, bien définie par unicité de la décomposition de y. Il existe donc $\mu > 0$ tel que $\max_{1\leqslant i\leqslant n} \|y_i\| \leqslant \mu\|y\|$ pour tout $y \in \mathbb{C}^N$ par équivalence des normes en dimension finie. De plus, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ et Q_i est polynomiale donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\frac{\operatorname{Re}\lambda_i}{2}t}\|Q_i(t)\| = 0$. Comme de plus $t \mapsto e^{\frac{\operatorname{Re}\lambda_i}{2}t}\|Q_i(t)\|$ est continue, elle est bornée sur $[0,+\infty[$, on pose $M_i = \sup_{t\in[0,+\infty[} e^{\frac{\operatorname{Re}\lambda_i}{2}t}\|Q_i(t)\|$. On pose également $c = -\frac{1}{2}\min_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Re}\lambda_i > 0$, on a alors

$$\|\exp(Mt)y\| \leqslant \mu\|y\| \sum_{i=1}^{n} M_i e^{-ct} = \|y\|Ke^{-ct}$$

avec $K = \mu\sum_{i=1}^{n} M_i > 0$. Ceci valant pour tout $y \in \mathbb{C}^N$, on a $|\!|\!|\exp(Mt)|\!|\!| \leqslant Ke^{-ct}$ pour tout $t \in [0,+\infty[$.

8. Si A et B ne vérifient pas $[a]$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $y \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ tels que $Ay = \lambda y$ et $By = 0$ de sorte que $(A - \lambda I_N - B^*B)y = 0$. Ainsi pour tout $t \in [0,+\infty[$, comme λI_N et $A - B^*B$ commutent, on a :

$$\|\exp((A - B^*B)t)y\| = e^{(\operatorname{Re}\lambda)t}\|\exp((A - \lambda I_N - B^*B))y\| = \|y\|$$

car les valeurs propres de A sont imaginaires pures d'après la question **1.**, donc $|\!|\!|\exp((A - B^*B)t)|\!|\!| \geqslant 1$ et on ne peut avoir la convergence (2).

Partie IV

1. $(iA)^* = {}^t\overline{(iA)} = -iA^* = -iA$ donc iA est antihermitienne, les résultats de la partie précédente pourront donc être utilisés ici avec iA et B.

2. On effectue une double intégration par parties :

$$\begin{aligned}
c_k(w_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_0(x)e^{-ikx}dx \\
&= \underbrace{\left[w_0(x)\frac{e^{-ikx}}{-2i\pi k}\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{1}{2i\pi k}\int_0^{2\pi}\frac{dw_0}{dx}(x)e^{-ikx}dx \\
&= \underbrace{\left[\frac{dw_0}{dx}(x)\frac{e^{-ikx}}{2\pi k^2}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{2\pi k^2}\int_0^{2\pi}\frac{d^2w_0}{dx^2}(x)e^{-ikx}dx \\
&= -\frac{1}{k^2}c_k\left(\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et sachant $c_0(w_0) = 0$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|kc_k(w_0)\| = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left\|\frac{1}{k}c_k\left(\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)\right\| \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left\|c_k\left(\frac{d^2w_0}{dx^2}\right)\right\|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(\int_0^{2\pi}\left\|\frac{d^2w_0}{dx^2}\right\|^2 dx\right)^{1/2} < +\infty$$

d'après l'égalité de Parseval.

3. On pose pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $f_k(t,x) = \exp((ikA - B^*B)t)c_k(w_0)e^{ikx}$

• $\|f_k(t,x)\| = \|\exp((ikA - B^*B)t)c_k(w_0)\| \leqslant |\!|\!|\exp((ikA - B^*B)t)|\!|\!|\|c_k(w_0)\| \leqslant \|c_k(w_0)\|$ et $\sum\|c_k(w_0)\|$ converge donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et w est bien définie.

• De même $\left\|\frac{\partial f_k}{\partial x}(t,x)\right\| \leqslant \|kc_k(w_0)\|$ et $\sum\|kc_k(w_0)\|$ converge donc la série $\sum\frac{\partial f_k}{\partial x}$ converge normalement sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et ainsi w est dérivable par rapport à x.

• De même

$$\left\|\frac{\partial f_k}{\partial t}(t,x)\right\| \leqslant \|ikA - B^*B\|\|c_k(w_0)\| \leqslant (|k|\|A\| + \|B^*B\|)\|c_k(w_0)\|$$

et $\sum(|k|\|A\| + \|B^*B\|)\|c_k(w_0)\|$ converge donc la série $\sum\frac{\partial f_k}{\partial t}$ converge normalement sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et ainsi w est dérivable par rapport à t.

• D'après ce qui précède :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ikA - B^*B)\exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)e^{ikx} = A\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) - B^*Bw(t,x)$$

• $w(t,x) = w(t,x+2\pi)$ car $x \mapsto e^{ikx}$ est 2π-périodique pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

• La série $\sum f_k(t,\cdot)$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0,2\pi]$, on peut donc permuter les symboles série/intégrale :

$$\int_0^{2\pi} w(t,x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx$$

Or pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx = 0$ donc

$$\int_0^{2\pi} w(t,x)dx = c_0(w_0) = 0$$

• Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$w(0,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(w_0)e^{ikx} = w_0(x)$$

4. Soit $\varepsilon > 0$, $\sum \|c_k(w_0)\|^2$ converge donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|\geqslant p}} \|c_k(w_0)\|^2 < \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a :

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|\geqslant p}} \|\exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)\|^2 \leqslant \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|\geqslant p}} \underbrace{|\!|\!|\exp((ikA-B^*B)t)|\!|\!|^2}_{\leqslant 1} \|c_k(w_0)\|^2 < \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2dx &\leqslant \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)\|^2dx \\
&= 2\pi \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|\geqslant p}} \|\exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)\|^2 + 2\pi \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|< p}} \|\exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)\|^2 \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2\pi \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|< p}} \|\exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)\|^2
\end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\|\exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)\|^2 \leqslant |\!|\!|\exp((ikA-B^*B)t)|\!|\!|^2\|c_k(w_0)\|^2 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il existe donc $t_k \in [0,+\infty[$ tel que $\|\exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)\|^2 < \frac{\varepsilon}{4\pi(2p-1)}$ pour $t \geqslant t_k$. Posons $T = \max_{|k|<p} t_k$, alors pour $t \geqslant T$, on a :

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\|k|< p}} \|\exp((ikA-B^*B)t)c_k(w_0)\|^2 < \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

Finalement, pour $t \geqslant T$, on a :

$$\int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2dx < \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2dx = 0$.

Partie V

1. Soit $N : Y \mapsto \sqrt{\|BY\|^2 + \|BAY\|^2}$, alors N est une norme sur $\mathbb{C}^2$. En effet les axiomes d'homogénéité et de séparation sont immédiats et pour $Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}^2$,

$$N(Y_1+Y_2)^2 = \langle B(Y_1+Y_2), e_1\rangle^2 + \langle B(Y_1+Y_2), e_2\rangle^2 + \langle BA(Y_1+Y_2), e_1\rangle^2 + \langle BA(Y_1+Y_2), e_2\rangle^2 = \|Z_1+Z_2\|_2^2$$

où (e_1, e_2) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^2$, et où $Z_i = (\langle BY_i, e_1\rangle, \langle BY_i, e_2\rangle, \langle BAY_i, e_1\rangle, \langle BAY_i, e_2\rangle) \in \mathbb{C}^4$ pour $i \in \{1,2\}$. Comme $\|\cdot\|_2$ est une norme, elle vérifie l'inégalité triangulaire donc

$$N(Y_1+Y_2) = \|Z_1+Z_2\|_2 \leqslant \|Z_1\|_2 + \|Z_2\|_2 = N(Y_1) + N(Y_2)$$

ainsi N vérifie l'inégalité triangulaire, c'est donc une norme. Finalement, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$\forall Y \in \mathbb{C}^2, C_1\|Y\|^2 \leqslant \|BY\|^2 + \|BAY\|^2 \leqslant C_2\|Y\|^2$$

par équivalence des normes en dimension finie.

2.(a) X_k résout le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dX_k}{dt} = (ikA - B^*B)X_k \\ X_k(0) = c_k(w_0) \end{cases}$$

(b) Soit $Y \in \mathbb{C}^N$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité arithmético-géométrique :

$$|\operatorname{Im}\langle BAY, BY\rangle| \leqslant |\langle BAY, BY\rangle| \leqslant \|BAY\|\|BY\| \leqslant \frac{\|BAY\|^2 + \|BY\|^2}{2} \leqslant \frac{C_2}{2}\|Y\|^2$$

Posons $\varepsilon_0 = \frac{1}{C_2} > 0$, alors pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et pour tout $Y \in \mathbb{C}^N$:

$$\left|\frac{\varepsilon}{k}\operatorname{Im}\langle BAY, BY\rangle\right| \leqslant \frac{\varepsilon C_2}{2|k|}\|Y\|^2 \leqslant \frac{1}{2|k|}\|Y\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|Y\|^2$$

donc $\frac{1}{2}\|Y\|^2 \leqslant \mathcal{L}_{\varepsilon,k}(Y) \leqslant \frac{3}{2}\|Y\|^2$.

(c) X_k est dérivable donc $t \mapsto \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]$ est également dérivable et de plus d'après la question **3.** de la partie **I**, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]}{dt} &= -2\|BX_k(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{k}\operatorname{Im}\left\langle BA\frac{dX_k}{dt}(t), BX_k(t)\right\rangle + \frac{\varepsilon}{k}\operatorname{Im}\left\langle BAX_k(t), B\frac{dX_k}{dt}(t)\right\rangle \\ &= -2\|BX_k(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{k}\operatorname{Im}\langle BA(ikA - B^*B)X_k(t), BX_k(t)\rangle + \frac{\varepsilon}{k}\operatorname{Im}\langle BAX_k(t), B(ikA - B^*B)X_k(t)\rangle \end{aligned}$$

(d) On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\operatorname{Im}\langle ikBA^2X_k(t), BX_k(t)\rangle| \leqslant |k\langle BA^2X_k(t), BX_k(t)\rangle| \leqslant k\|BA^2X_k(t)\|\|BX_k(t)\| \leqslant k|||BA^2|||\|X_k(t)\|\|BX_k(t)\|$$

De même :

$$|\operatorname{Im}\langle BAB^*BX_k(t), BX_k(t)| \leqslant |||BAB^*B|||\|X_k(t)\|\|BX_k(t)\| \leqslant k|||BAB^*B|||\|X_k(t)\|\|BX_k(t)\|$$

$$|\operatorname{Im}\langle ikBAX_k(t), BAX_k(t)\rangle| = k\|BAX_k(t)\|^2$$

De plus A étant hermitienne, $\langle BAX_k(t), BB^*BX_k(t)\rangle = \langle X_k(t), AB^*BB^*BX_k(t)\rangle$ donc :

$$\|\operatorname{Im}\langle BAX_k(t), BB^*BX_k(t)\rangle| \leqslant |||AB^*BB^*|||\|X_k(t)\|\|BX_k(t)\| \leqslant k|||AB^*BB^*|||\|X_k(t)\|\|BX_k(t)\|$$

Ainsi, en posant $C_3 = |||BA^2||| + |||BAB^*B||| + |||AB^*BB^*|||$, on a

$$\frac{d\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]}{dt} \leqslant -2\|BX_k(t)\|^2 - \varepsilon\|BAX_k(t)\|^2 + \varepsilon C_3\|X_k(t)\|\|BX_k(t)\|$$

(e) D'après la question **1.**, $\|BAX_k(t)\| \geqslant C_1\|X_k(t)\|^2 - \|BX_k(t)\|^2$ et d'après la question **(b)**, $\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] \leqslant \frac{3}{2}\|X_k(t)\|^2$. Soit $C_4 > 0$ quelconque et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, alors d'après la question précédente,

$$\frac{d\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]}{dt} + \varepsilon C_4\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] \leqslant \|X_k(t)\|^2 P_\varepsilon\left(\frac{\|BX_k(t)\|}{\|X_k(t)\|}\right)$$

avec $P_\varepsilon = (\varepsilon - 2)X^2 + \varepsilon C_3 X + \varepsilon\left(\frac{3}{2}C_4 - C_1\right)$. Le discriminant de P_ε est $\Delta_\varepsilon = (C_3^2 - 6C_4 + 4C_1)\varepsilon^2 + (12C_4 - 4C_1)\varepsilon$. Posons $C_4 = \frac{1}{6}C_1 < \frac{1}{3}C_1$ et $\varepsilon_1 = \min\left(\frac{4C_1 - 12C_4}{C_3^2 - 6C_4 + 4C_1}, \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \in]0, \varepsilon_0[$, alors pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$, on a $\Delta_\varepsilon \leqslant 0$ donc P_ε est de signe constant sur $\mathbb{R}$. De plus $P_\varepsilon(0) = \varepsilon\left(\frac{3}{2}C_4 - C_1\right) \leqslant 0$ car $C_4 \leqslant \frac{2}{3}C_1$, donc P_ε est négatif sur $\mathbb{R}$. Finalement

$$\forall t \in [0, +\infty[, \frac{d\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]}{dt} + \varepsilon C_4 \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] \leqslant 0$$

(f) On pose pour $t \in [0, +\infty[$

$$\varphi(t) = \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] e^{\varepsilon C_4 t}$$

Alors φ est dérivable et

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \left(\frac{d\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]}{dt}(t) + \varepsilon C_4 \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]\right) e^{\varepsilon C_4 t} \leqslant 0$$

d'après la question précédente. Ainsi φ est décroissante et pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] = \varphi(t) e^{-\varepsilon C_4 t} \leqslant \varphi(0) e^{-\varepsilon C_4 t} = \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(0)] e^{-\varepsilon C_4 t}$$

3. D'après la question **2.(b)**, on a :

$$\|X_k(t)\|^2 \leqslant 2\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] \leqslant 2\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(0)] e^{-\varepsilon C_4 t} \leqslant 3\|X_k(0)\|^2 e^{-\varepsilon C_4 t}$$

Ainsi, en posant $K = \sqrt{3}$ et $c = \frac{1}{2}\varepsilon C_4 > 0$, on a $\|X_k(t)\| \leqslant K e^{-ct} \|c_k(w_0)\|$.

4. D'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2 dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|X_k(t)\|^2 \leqslant K^2 e^{-2ct} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|c_k(w_0)\|^2 = \frac{K^2 e^{-2ct}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|w_0(x)\|^2 dx$$

d'où

$$\left(\int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant K e^{-ct} \left(\int_0^{2\pi} \|w_0(x)\|^2 dx\right)^{1/2}$$