Concours Communs Polytechniques - Session 2010

Corrigé de l'épreuve de mathématiques 1
Filière MP

Fonctions de plusieurs variables, compacité, phénomène de Gibbs

Corrigé par M.TARQI

EXERCICE 1

1. On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

et

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} y = 0,$$

donc f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

2. On a $|f(x,y)| \leq y^2 \leq \|(x,y)\|_2^2$ où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Donc pour tout couple (x,y) non nul, $\dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Ainsi $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = 0$, donc f est différentiable en $(0,0)$ et $df_{(0,0)} = 0$.

EXERCICE 2

1. Une partie A d'un espace vectoriel normé est un compact si et seulement si de toute suite de points de A, on peut extraire une sous-suite convergente dans A.
2. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(A)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $y_n = f(x_n)$, comme A est une partie compacte et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément a de A. Puisque f est continue, la sous-suite $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $b = f(a) \in f(A)$, donc $f(A)$ est un compact.
   L'image réciproque d'un compact n'est pas nécessairement un compact, comme le montre l'exemple de l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ix}$. En effet, le cercle unité C est un compact de $\mathbb{C}$, mais $f^{-1}(C) = \mathbb{R}$ n'est pas un compact.

PROBLÈME : PHÉNOMÈNE DE GIBBS

Partie préliminaire

1. (a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ étant continue sur $]0,\pi]$ et se prolonge par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0,\pi]$.

   (b) On a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \sin t = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

   La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est développable en série entière en 0, en effet, $\forall t \neq 0$, on a :

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}$$

et comme le second membre vaut 1 en 0, alors on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\sin t}{t} = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}$$

Comme toute série entière est uniformément convergente dans l'intérieur de son disque de convergence, alors, en particulier, la série précédente est uniformément convergente sur $[0, \pi]$ et par conséquent :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^{\pi} t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k$$

avec $u_k = \dfrac{\pi^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}$

2. (a) La suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ est convergente ; c'est le terme général d'une série convergente.

On a $\dfrac{\dfrac{\pi^{n+1}}{(n+1).(n+1)!}}{\dfrac{\pi^n}{n.n!}} = \dfrac{n\pi}{n^2 + 2n + 1} < 1$ car $(3n < n^2 + 2n + 1)$, donc la suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n.n!}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante.

(b) Puisque la suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n.n!}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous suite de $\left(\dfrac{\pi^n}{n.n!}\right)_{n \geq 1}$, alors $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1) u_k$ est une série alternée et on peut donc écrire :

$$|R_n| \leq u_{n+1} = \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!}.$$

Pour avoir une valeur approchée à 10^{-2} près il suffit de choisir un entier naturel n tel que $\dfrac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!} \leq 10^{-2}$. On trouve $\dfrac{2}{\pi} I \simeq 1,1789$.

Première partie : Phénomène de Gibbs

3. La fonction f étant impaire, ses coefficients de Fourier sont :

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt,$$

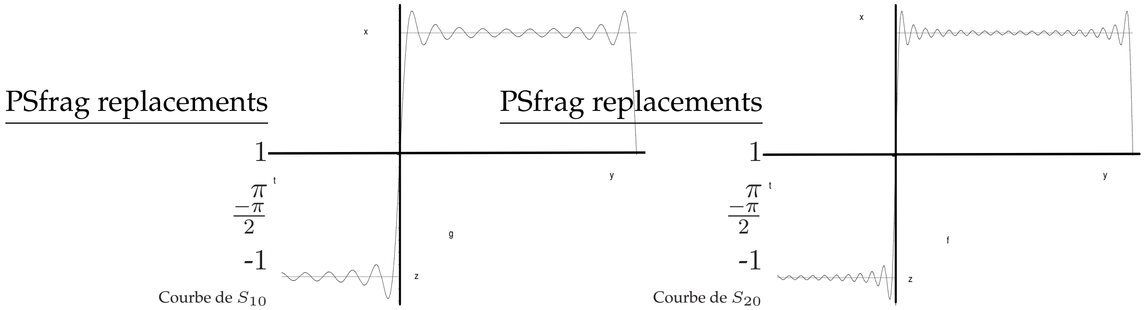
d'où $b_n = 0$ si n est pair et $b_n = \dfrac{4}{n\pi}$ si n est impair, donc la série de Fourier de f s'écrit : $\displaystyle\frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$.

D'après le théorème de Dirichlet, la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

La convergence ne peut pas etre uniforme sur $\mathbb{R}$, puis les fonctions $t \longmapsto \dfrac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ alors que f est discontinue sur $\mathbb{R}$.

4. Près de 0, le maximum de la différence des sommes partielles et de la fonction f ne tend pas vers zéro, et cette phénomène se produit en tout point de $\pi\mathbb{Z}$, l'ensemble des points de discontinuité de f.



Courbe de S_{10} Courbe de S_{20}

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a :

$$2\sin t T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin t \sin[(2k+1)t] = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos 2kt - \cos(2(k+1))t) = 1 - \cos 2nt,$$

donc si de plus $t \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, alors

$$T_n(t) = \frac{\sin^2 nt}{\sin t}.$$

(b) La fonction T_n est bien définie sur $[a, b]$ et comme $0 \leq \sin^2 nt \leq 1$, alors il existe une constante M, qui ne dépend pas de n tel que $\forall t \in [a, b], \;\; |T_n(t)| \leq M$.

(c) Pour cette question il suffit de montrer que la suite de fonction $(S_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Pour cela, montrons que cette suite vérifie le critère de Cauchy.

Soit n et p des entiers naturels non nuls et $t \in [a, b]$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4}|S_{n+p}(t) - S_n(t)| &= \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_{k+1}(t)}{2k+1} - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_k(t)}{2k+1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_k(t)}{2k-1} - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_k(t)}{2k+1}\right| \\
&= \left|\frac{T_{n+p}(t)}{2(n+p)-1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} T_k(t)\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) - \frac{T_n(t)}{2n+1}\right| \\
&= \left|\frac{T_{n+p}(t)}{2(n+p)-1} + 2\sum_{k=n+1}^{n+p-1} T_k(t)\frac{1}{4k^2-1} - \frac{T_n(t)}{2n+1}\right| \\
&\leq M\left(\frac{1}{2(n+p)-1} + 2\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ceci permet de conclure.

6. (a) Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $S'_n(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos[(2k+1)t]$. Mais

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos[(2k+1)t] = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{it}e^{2ikt}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{int}\frac{e^{itn}-1}{e^{it}-1}\right) = \cos nt\frac{\sin nt}{\sin t} = \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}.$$

Ainsi $S'_n(t) = 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = \dfrac{k\pi}{2n}$, donc $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2n}$.

(b) D'après ce qui précède et puisque $S_n(0) = 0$, on a :

$$S_n(x) = \int_0^x S'n(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t}dt$$

et

$$S_n(\alpha_n) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin t}dt$$

puis par le changement de variable $u = 2nt$, on obtient

$$S_n(\alpha_n) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n}}du.$$

(c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(\alpha_n) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}du = \frac{1}{n\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin u\left(\frac{1}{\sin \frac{u}{2n}} - \frac{1}{\frac{u}{2n}}\right)\right)du$$

La fonction $\varphi : t \longmapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et se prolonge par 0 en 0 par continuité, donc, elle est majorée sur $[0, \pi]$. D'où :

$$\left|S_n(\alpha_n) - \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{u}du\right| = \left|\frac{1}{n\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin u\left(\frac{1}{\sin \frac{u}{2n}} - \frac{1}{\frac{u}{2n}}\right)\right)du\right| \leq \frac{1}{n\pi}\sup_{t\in[0,\pi]}|\varphi(t)|\int_0^{\pi} \sin u du,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\alpha_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}dt$$

7. Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\sup_{x\in]0,\frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)| \geq |S_n(\alpha_n) - 1|$$

et $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n(\alpha_n) - 1| = \dfrac{2}{\pi}I - 1 \simeq 0,1789 \neq 0$, d'après la question 2.(b) de la partie préliminaire. Donc la suite $\left(\sup\limits_{x\in]0,\frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)|\right)_n$ ne tend pas vers 0.

Deuxième partie : Démonstration du théorème de convergence normale

8. Si f est une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodique, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right]$ est convergente et

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2dt.$$

Si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$, d'après la formule de Parseval, on a alors $\|f\|_2^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = 0$ et par conséquent $f = 0$.
Le résultat n'est pas vrai si est seulement continue, par exemple si f est la fonction 2π péridiodique nulle partout sauf en 0 où elle prend une valeur non nulle, alors $c_n(f) = 0$, mais f est non nulle.

9. (a) Puisque la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers g, alors g est continue et 2π-périodique et on peut intégrer terme à terme sur $[0, 2\pi]$, d'où :

$$c_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt = c_0(f)$$

et $\forall n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(c_0(f) + \sum_{p=1}^{\infty}(c_{-p}e^{-ipt} + c_p(f)e^{ipt}\right)e^{int} = c_n(f).$$

(b) Le théorème de Parseval appliquée à la fonction $f-g$, dont les coefficients de Fourier sont nuls, montre que $\|f-g\|_2 = 0$, donc $g = f$.

10. (a) A l'aide d'une intégration par parties, on obtient $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$.

(b) On a :

$$|c_n(f)| = \frac{1}{n}\left|c_n(f')\right|,$$

et $\forall t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|u_n(f)(t)\| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|.$$

D'autre part, remarquons : $\forall u, v > 0$, $uv \leq \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ |c_n(f)| = \frac{1}{n}|c_n(f')| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')^2|\right),$$

ce qui entraîne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ |u_n(f)(t)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^2} + |c_{-n}(f')|^2 + |c_n(f')|^2\right).$$

(c) Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{n\geq 1}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2)$ converge (théorème de Parseval), on en déduit que la série de Fourier de f, $c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(f)$, est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g et d'après la question $9.(b)$, $f = g$.

(d) On vient de montrer le résultat suivant : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f.
Le phénomème de Gibbs ne peut pas se produire pour cette fonction puisque pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on a : $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|S_n(f)(x) - f(x)| = 0$, où $S_n(f)$ est la série de Fourier de f.

•••••••••••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr