# CONCOURS COMMUN INP 2021
# CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES I- MP

m.laamoum@gmail.com

Un grand merci à Mr A. El Hammoudi qui a rédigé la partie informatique du Problème .

# EXERCICE I

**Q1.** Soit $k \in \mathbb{N}$ et $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t \ dt$.

— Existence :

Posons $g_k : ]0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $g_k(t) = t^{2k} \ln t$ .

$g_k$ est continue sur $]0,1]$ et $\sqrt{t} g_k(t) \underset{t \to 0^+}{\to} 0$ , donc $g_k(t) \underset{t \to 0}{=} o(\frac{1}{\sqrt{t}})$ , comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ alors $g_k$ l'est aussi , d'où l'existence de $I_k$.

— Calcul :

On a $I_k = \displaystyle\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 t^{2k} \ln t \ dt$ , une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_a^1 t^{2k} \ln t \ dt &= \left[\tfrac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t\right]_a^1 - \tfrac{1}{2k+1} \int_a^1 t^{2k} \ dt \\ &= -\tfrac{a^{2k+1}}{2k+1} \ln a - \tfrac{1-a^{2k+1}}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient :

$$I_k = -\tfrac{1}{(2k+1)^2}$$

**Q2.**

— Intégrabilité :

- En 0 **:** $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \ln t$ , donc $f(t) \underset{t \to 0}{=} o(\frac{1}{\sqrt{t}})$ , on en déduit que $f$ est intégrable au voisinage de 0 ( sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ par exemple ).
- En 1 : $f(t) = \dfrac{1}{t+1} \dfrac{\ln t}{t-1}$ , on a $\displaystyle\lim_{t \to 1} \dfrac{\ln t}{t-1} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{t \to 1} f(t) = 1$ . $f$ est prolongeable par continuité en 1 donc elle est intégrable au voisinage de 1 .

Ainsi $f$ est intégrable sur $]0,1[$ .

— Calcul : Par application du théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$ .

Pour $t \in ]0,1[$ on a

$$f(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2k} \ln t = -\sum_{n=0}^{+\infty} g_k(t)$$

On a :

- $\sum g_k$ converge simplement ver $f$ sur $]0,1[$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$ , $g_k$ est intégrable sur $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 g_k(t)\ dt = \frac{-1}{(2k+1)^2}$.
- La série $\sum \displaystyle\int_0^1 |g_k(t)|\ dt$ converge .

Le théorème s'applique et on a :

$$\int_0^1 f(t)dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2k+1)^2}$$

On sait que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , écrivons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ainsi

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{\pi^2}{8}$$

# EXERCICE II

**Q3.** La dérivée seconde de ln est la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ , elle est de signe négatif donc ln est concave sur $]0,+\infty[$ .

Soit $(a,b,c) \in ]0,+\infty[^3$ , l'inégalité de concavité donne :

$$\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln\left((abc)^{\frac{1}{3}}\right)$$

donc

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

On note $f$ la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x;y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

**Q4.**

— Point critique :

$f$ est de classe $\mathcal{C}^1$sur $]0,+\infty[^2$et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \dfrac{1}{x^2y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \dfrac{1}{xy^2}$ .

$(x,y)$ est un point critique de $f$ sur $]0,+\infty[^2$ si et seulement si : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, donc :

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2y} = 0 \\ 1 - \frac{1}{xy^2} = 0 \end{cases}$$

qui donne

$$\begin{cases} x = y = \dfrac{1}{xy} \end{cases}$$

ainsi $x = y = 1$. Le point $(1,1)$ est l'unique point critique de $f$ sur $]0,+\infty[^2$.

— Nature du point critique :

L'inégalité de la question précédente appliquée pour $a = x$, $b = y$ et $c = \frac{1}{xy}$ , donne

$$\sqrt[3]{abc} = 1 \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3} f(x,y)$$

On en déduit : $\forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2 \ f(x,y) \geq f(1,1) = 3$ donc $(1,1)$ est un minimum global .

# PROBLEME

## Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann

## Partie I - Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

**Q5**.

```
def factorielle(n):
    P = 1
    for i in range(2,n+1):
            P*=i
    return P
```

**Q6.**

```
def binom(n,p):
    if not (0 <= p <= n) : return 0
    return factorielle(n)//(factorielle(p)*factorielle(n-p))
```

Remarque : la version proposée `binom(n,p)` est la version naïve qui effectue $2n$ opérations de multiplications. Le nombre exacte de multiplications dépend de la plage des valeurs de `i` utilisée dans la boucle `for`. Dans notre cas de `range(2,n+1)` la boucle effectue `n-1` multiplications pour tout $n \geq 2$. Donc :

`factorielle(n)` effectue n-1 multiplications

`factorielle(p)` effectue p-1 multiplications

`factorielle(n-p)` effectue n-p-1 multiplications

et il faut y ajouter une multiplication `factorielle(p)*factorielle(n-p)`

D'où le nombre total de multiplications = (n-1) + (p-1) + (n-p-1) + 1 = 2n-2.

Donc `binom(30,10)` va effectuer 58 multiplications.

On peut réduire le nombre de multiplications en utilisant l'expression

`(n*(n-1)*(n-2)*....*(n-(p-1)))//factorielle(p)`

pour calculer le binomial, qui effectue uniquement 2p multiplications. Et par conséquent `binom(30,10)` va effectuer 20 multiplications au maximum (19 selon notre code).

Le type du résultat de "`return factorielle(n)/factorielle(p)*factorielle(n-p)`" est float.

**Q7**.

```
def binom_rec(n,p):
        if p == 0 : return 1
        return int(n/p*binom_rec(n-1,p-1))
```

Remarque : il ne faut pas utiliser l'expression `return n//p * binom_rec(n-1,p-1)`

**Q8.**

La question demande d'écrire une version non récursive de `bernoulli(n)`.

En effet, il est plus facile d'écrire une version récursive de `bernoulli(n)` qui reflète exactement l'expression récurrente

donnée dans l'énoncé. Mais elle aura une complexité exponentielle qui est non pratique et qui nécessite un temps imaginaire pour

s'exécuter pour des valeurs de $n \geq 30$.

Cette version qui est raisonnablement inacceptée est la suivante :

```
def bernoulli(n):
        if n == 0:return 1
        S = 0
        for k in range(n):
                S+ = binomial(n+1,k)*bernoulli(k)
        return-S/(n+1)
```

La version non récursive qui a une complexité raisonnable (polynomiale) consiste à stocker les nombres de Bernoulli $b_i$ dans une liste `b` de taille $n+1$, telle que pour tout $0 \leq i \leq n$ `b[i]`=le nombre de Bernoulli $b_i$. Ainsi, On peut utiliser les termes de la suite des nombres de Bernoulli $(b_k)_{k<i}$ stockés dans la liste `b` pour calculer le terme $b_i$.

Il suffit enfin de renvoyer la dernière valeur de la liste b qui contient la valeur de $b_n$.

```
def bernoulli(n):
        b=[1] #b =[b0]
        for i in range(1,n+1):
                S = 0
                for k in range(i):
                        S+ = binomial(i + 1,k)*b[k] #b[k]=bk
                b.append(-S/(i + 1))
        return b[n]
```

Il serait plus pratique de renvoyer la liste `b` qui va contenir tous les nombres de Bernoulli $b_k$ tel que $0 \leq k \leq n$, ce qui nous

permettrait par la suite de récupérer chaque $b_k$ en O(1).

Il est à noter qu'on a le droit d'utiliser la fonction `binomial(n,p)` sans la définir. Mais nous avons jugé important de l'ajouter

dans cette proposition de correction.

La fonction `binomial(n,p)` plus optimale qu'on va proposer se base sur l'expression
(n*(n-1)*(n-2)*....*(n-(p-1))) //factorielle(p)

```
def binomial(n,p):
        # on calculera d'abord prod =n*(n-1)*(n-2)*....*(n-(p-1))
        prod = 1
        for k in range(p):
                prod* = (n-k)
        return prod//factorielle(p)
```

## Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n$ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

**Q9.** Soit $a > 1$ , prenons $\alpha \in ]1, a[$ de sorte que $\dfrac{\ln n}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n^\alpha})$ , comme$\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge alors $\sum \dfrac{\ln n}{n^a}$ est convergente.

**Q10.** On a$\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ . $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$sur $]1, +\infty[$ et $f_n'(x) = \dfrac{-\ln n}{n^x}$ .
Soit $a > 1$ , on a $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n'(x)| = \dfrac{\ln n}{n^a}$ , or la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ est convergente alors la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement , et uniformément sur $[a, +\infty[$ . D'après le théorème de dérivabilité des séries de fonctions, la fonction $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ ,ceci étant vrai pour tout $a > 1$ donc $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in ]1, +\infty[\,,\ \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^a}$$

Les termes de la série, définissant $\zeta'$ , sont négatifs donc $\zeta'$ est négatif et $\zeta$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

**Q11.** On a $\lim\limits_{x\to1^+} f_n(x) = \frac{1}{n}$ . Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $]1, +\infty[$ , le théorème d'interversion de lim et $\sum$ donne $\sum \frac{1}{n}$converge , ce qui est absurde , donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$ .
on a convergence normale et uniforme de $\sum f_n$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.

**Q12.** $\sum f_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \geq 2 \\ 1 \text{ si } n = 1 \end{cases}$ , le théorème d'interversion de lim et $\sum$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

**Q13.** Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$ , pour $t \in [k, k+1]$ , on a $\frac{1}{(k+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$ . On intègre cette relation , entre $k$ et $k+1$ on obtient ;

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

on fait la somme pour tout $k \geq 1$, on obtient

$$\zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \quad .$$

Ainsi

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1$$

On a $I(x) = \dfrac{1}{x-1}$, donc

$$\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

**Q14.**

— $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est positive. Soit $x>1$ , fixons $a$ dans $\mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{b\geq 1} \frac{1}{(ab)^x}$ est convergente et $\sigma_a = \frac{1}{a^x}\sum\limits_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{b^x} = \frac{\zeta(x)}{a^x}$ , donc la série $\sum\limits_{a\geq 1}\sigma_a$ converge. Ainsi la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable.
Soit $S$ la somme de cette famille . Le théorème de sommation par paquets donne

$$\begin{aligned} S &= \sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{(ab)^x} \\ &= \sum_{a=1}^{+\infty}\frac{1}{a^x}\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{b^x} \\ &= \zeta(x)^2. \end{aligned}$$

donc la somme de $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ vaut $\zeta(x)^2$.

— Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A_n = \{(a,b)\in A, ab=n\}$. On a par double inclusion $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ . Remarquons que $A_n = \{(d,\frac{n}{d})$ tel que $d|n\}$ par suite $Card(A_k) = d_k$ .
Le théorème de sommation par paquets donne

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{(n,m)\in A_k}\frac{1}{(nm)^x} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{Card(A_k)}{k^x} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d_k}{k^x}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}$$

## Partie III - Produit eulérien

Soit $s>1$ un réel fixé. On a $\forall k\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}$.

**Q15.** Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X \in a\mathbb{N}^*\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = na) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(na)^s} \\
&= \frac{1}{\zeta(s)a^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}\left(X \in a\mathbb{N}^*\right) = \dfrac{1}{a^s}$.

**Q16.** Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 2$ : si $a_1|N$ et $a_2|N$ alors $N = k.a_1$ et $a_2|N$, par suite $a_2|\ k.a_1$ et $a_1 \wedge a_2 = 1$, le théorème de Gauss donne : $a_2|k$ , donc $a_1a_2|N$ . La réciproque est immédiate .

Supposons le résultat pour $n > 2$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$, tels que $(a_1|N, a_2|N, \ldots, a_{n+1}|N)$ donc $(a_1|N, a_2|N, \ldots, a_n|N)$ et $a_{n+1}|N$ , l'hypothèse de récurrence donne : $(a_1a_2\ldots a_n|N, a_{n+1}|N)$ , comme $a_1a_2\ldots a_n \wedge a_{n+1} = 1$ , alors , d'après le cas $n = 2$ , on a $a_1a_2\cdots a_{n+1}|N$ . La réciproque est évidente . Ainsi on a : pour tout $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$.

$$a_1|N, a_2|N, \ldots, a_n|N \Leftrightarrow a_1a_2\cdots a_n|N$$

Le résultat n'est pas valable si les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont seulement premiers dans leur ensemble : Par exemple $3|18$ , $9|18$ et $2|18$ , $PGCD(3, 9, 2) = 1$ mais $3 \times 9 \times 2 \nmid 18$

**Q17.** Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements .

Soit $(b_1, \ldots, b_r)$ une sous-famille de la famille $(a_1, \ldots, a_n)$. On a

$$\bigcap_{k=1}^{r} [X \in b_k\mathbb{N}^*] = \{\omega \in \Omega\ , (b_1|X(\omega), b_2|X(\omega), \ldots, b_r|X(\omega))\}$$

Comme $b_1, \ldots, b_r$ sont premiers entre eux deux à deux, alors

$$\bigcap_{k=1}^{r} [X \in b_k\mathbb{N}^*] = \{\omega \in \Omega\ , b_1b_2\ldots b_r|X(\omega\}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{r} [X \in b_k\mathbb{N}^*]\right) &= \mathbb{P}\left([X \in b_1b_2\ldots b_r\mathbb{N}^*]\right) \\
&= \frac{1}{\left(b_1b_2\ldots b_r\right)^s} \\
&= \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}\left([X \in b_k\mathbb{N}^*]\right)
\end{aligned}$$

Ainsi toute sous famille $(b_1, \ldots, b_r)$ de la famille $(a_1, \ldots, a_n)$ , les événements $([X \in b_k\mathbb{N}^*])_{1\leq k\leq r}$ sont indépendants, donc $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \ldots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants. .

**Q18.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $B_n = \{\omega \in \Omega \text{ , } p_1 \nmid X(\omega), ..., p_n \nmid X(\omega)\}$ donc $B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \{\omega \in \Omega \text{ , } p_k \nmid X(\omega)\}$ par suite

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} [X \notin p_k\mathbb{N}^*] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{[X \in p_k\mathbb{N}^*]}$$

Les événements $[X \in p_1\mathbb{N}^*], ..., [X \in p_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants donc $\overline{[X \in p_1\mathbb{N}^*]}, ..., \overline{[X \in p_n\mathbb{N}^*]}$ le sont aussi, ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{[X \in p_k\mathbb{N}^*]}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}([X \in p_k\mathbb{N}^*]) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right). \end{aligned}$$

**Q19.** Soit $\omega$ dans $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$, donc $X(\omega)$ est un entier non nul qui n'est divisible par aucun nombre premier, forcement on a $X(\omega) = 1$, donc $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \{1\}$ .
On en déduit que :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Remarquons que $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème de la limite monotone donne :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Ainsi

$$\zeta(s) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

**Q20.** Supposons que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$.
On a

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Puisque $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$ et $\sum \frac{1}{p_k}$ converge, alors la série $\sum - \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge, donc la suite $(\ln u_n)$ admet unelimite finie, la suite $(u_n)$ aussi. Soit $l$ la limite de $(u_n)$.
Soit $s > 1$, on a $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq \dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$ donc $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq u_n$ , par passage a la limite on obtient $\zeta(s) \leq l$.
D'après la question 13 on a $\zeta(s) \underset{s \to 1}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$ donc $\zeta(s) \underset{s \to 1+}{\to} +\infty$ , ce qui est absurde donc forcement $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge

FIN