

EPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES  
OPTIONS M, P' ET T.A.

(Durée de l'épreuve : 2 heures)  
\*\*\*

Objectif du problème :

Soit l'équation différentielle (E) du premier ordre  $y'(x) = y^2(x) + x$ .

On se propose de déterminer, ce qui fait l'objet de la partie II, un intervalle I de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et une fonction F dérivable dans I, solution de (E) dans cet intervalle I et vérifiant  $F(0) = 0$ .

L'utilisation d'un changement de fonction inconnue permet de ramener l'équation différentielle (E) à l'équation différentielle linéaire du second ordre  $(E_1)$   $z''(x) + xz(x) = 0$  et la recherche de I et de F à celle d'un intervalle J contenant 0 et d'une fonction f, solution de  $(E_1)$  sur J, vérifiant  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$ , qui ne s'annule pas dans I. Cette détermination fait l'objet de la première partie.

I - Etude de la solution f de  $(E_1)$

1. Développement de f en série entière

a) Montrer qu'il existe une solution f de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  et une seule telle que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ .

b) Prouver que f est développable en série entière sous la forme

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p a_p x^{3p}, \text{ où, pour tout entier naturel } p,$$

$a_p$  est strictement positif et déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Dans la suite du problème, on pose, pour tout  $p \geq 0$ ,

$$u_p(x) = a_p x^{3p} \text{ et } v_p(x) = u'_p(x).$$

2. Existence d'un zéro  $\alpha$  de f dans  $]0, 2[$

a) A partir du développement en série entière, déterminer les signes de f, f', f'' dans l'intervalle  $] -\infty, 0]$  et les limites de ces fonctions en  $-\infty$ .

b) En comparant  $\frac{v_{p+1}}{v_p}$  à 1, montrer que f'(x) est strictement négatif dans l'intervalle  $]0, 2[$ .

En déduire qu'il existe un élément  $\alpha$  de  $]0, 2[$  et un seul tel que  $f(\alpha) = 0$ .

c) A l'aide de l'équation  $(E_1)$ , étudier les signes de f, f', f'' dans l'intervalle  $]0, 2[$ .

d) Donner l'allure de la courbe représentative  $(C_1)$  de f sur l'intervalle  $] -\infty, 2[$ .

3. Détermination d'une valeur approchée de  $\alpha$

a) Déterminer un entier p tel que  $u_p(2) < \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$  et en déduire des valeurs approchées de f(2) et de f(1,9) à  $10^{-7}$  près.

Etablir que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[1,9 ; 2]$ .

b) En appliquant le premier pas de la méthode de Newton aux points  $x = 1,9$  et  $x = 2$ , déterminer un encadrement  $[\alpha_1, \alpha_2]$  de  $\alpha$  ; on interprétera graphiquement  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et on justifiera la précision obtenue.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT

II - Etude de la solution F de (E)

1. Existence et unicité de F

a) Soit  $y$  une solution de (E) sur un intervalle ouvert  $I$  contenant le point  $0$  ;

montrer que la fonction  $z$ , définie pour tout élément  $x$  de  $I$  par :

$$z(x) = \exp\left(-\int_0^x y(t) dt\right), \text{ est une solution de (E)}_1 \text{ sur l'intervalle}$$

$I$  ne s'annulant pas sur  $I$  et exprimer  $y$  en fonction de  $z$ .

b) En déduire qu'il existe une solution  $F$  de (E) sur  $]-\infty, \alpha[$  et une seule telle que  $F(0) = 0$ . Déterminer le signe de  $F$ .

c) Déterminer la limite de  $F(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $\alpha$ . Prouver que, si  $\alpha' > \alpha$ , il n'existe aucune solution  $G$  de (E) sur  $]-\infty, \alpha'[$  telle que  $G(0) = 0$ .

2. Etude des variations de F

On note (C) la courbe représentative de  $F$ . Dans toute la suite, on note  $g$  la fonction définie sur  $]-\infty, \alpha[$  par  $g(x) = f'^2(x) + x f^2(x)$ .

a) Etudier le signe de  $g$ , en déduire le sens de variation de  $F$  sur  $]-\infty, \alpha[$ .

b) Montrer que, pour tout élément  $x$  de  $]-\infty, 0[$ , (1)  $x(F^2(x) + x) - 2F(x) \leq 0$ .

A cet effet, on exprimera le premier membre à l'aide de  $f$  et  $f'$  et on étudiera le signe de la fonction  $h$  définie sur  $]-\infty, 0[$  par :

$$h(x) = x f'^2(x) + 2 f(x) f'(x) + x^2 f^2(x).$$

c) Etablir que, pour tout élément  $x$  de  $]-\infty, 0[$ , (2)  $0 \leq \sqrt{-x} - F(x) \leq -\frac{2}{x}$ .  
Interprétez graphiquement ce résultat.

d) A l'aide de (1) et de (2), déterminer la limite de  $F'$  en  $-\infty$ .

e) Dresser le tableau de variations de  $F$ .

3. Etude de la convexité de F

Soit  $\psi$  la fonction définie sur  $]-\infty, \alpha[$  par  $\psi = f^3 F''$ .

a) Etudier le signe de  $\psi'$  sur  $]-\infty, \alpha[$ . A cet effet, on introduira la fonction auxiliaire  $\varphi$  définie sur  $]-\infty, \alpha[$  par :

$$\varphi(x) = f(x) f'(x) + 2x f'^2(x) + 2x^2 f^2(x).$$

On étudiera son sens de variation, puis son signe. En déduire que  $\psi$  est strictement croissante sur  $]-\infty, \alpha[$ .

b) A partir des résultats établis dans la question 2) précédente, étudier le signe de  $F''$  dans  $[0, \alpha[$  et prouver que  $F''$  s'annule en au moins un point de  $]-\infty, 0[$ .

c) Etablir finalement que  $F''$  s'annule en un point  $\beta$  et un seul de  $]-\infty, 0[$ .

d) A partir des développements en série entière de  $f$  et de  $f'$ ,... on donne les valeurs approchées suivantes à  $10^{-5}$  près (ce qu'on ne demande pas de justifier) :

$$\begin{array}{ll} f(-1,2) = 1,30499 & , \quad f(-1,19) = 1,29701 , \\ f'(-1,2) = 0,80598 & , \quad f'(-1,19) = 0,79043 . \end{array}$$

En déduire que  $-1,2 < \beta < -1,19$ .

4. A partir de l'étude précédente, donner l'allure de (C).

FIN DU PROBLEME