ÉNONCÉ : MATH 1 ; MP ; Mines-ponts_2015

Opérateur de Volterra et équations différentielles

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.
On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par : $\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)dt$.
On note $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire.
Un endomorphisme V de E est dit symétrique défini positif si pour tous f, g dans E, on a :
$\langle V(f), g\rangle = \langle f, V(g)\rangle$ et si de plus $\langle V(f), f\rangle > 0$ pour tout $f \in E$ non nul.

Les parties **A** et **B** sont mutuellement indépendantes.

A. Opérateur de Volterra

On note V et V^* les endomorphismes de E définis par les formules :
$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $V^*(f)(x) = \int_x^{\pi/2} f(t)dt$; Pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, montrer que pour tous f, g dans E, on a : $\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle$.

2) Montrer que l'endomorphisme $V^* \circ V$ est symétrique défini positif.
En déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

3) Montrer que f_λ est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{\lambda} y = 0$.
avec les conditions : $y(\pi/2) = 0$ et $y'(0) = 0$.

4) En déduire que λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Préciser alors les vecteurs propres associés.

B. Théorème d'approximation de Weirstrass

Soit n un entier strictement positif, $x \in [0,1]$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la même loi de Bernoulli de paramètre x.
On note également : $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$; $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E(f(Z_n))$.

5) Rappeler sans démonstration, la loi de S_n, en déduire, avec démonstration, les valeurs de l'éspèrance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.

6) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\alpha^2}$$

7) Montrer que $B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(\frac{k}{n}) - f(x)\right)$
et en déduire que la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
On pourra utiliser le résultat de la question précèdente ainsi que le théorème de Heine.

On a donc établi le théorème de Weirstrass sur le segment $[0,1]$:
Toute fonction continue sur $[0,1]$ y est limite uniforme d'une suite de polynômes.
On en déduit aisément, et on l'admet, le théorème d'approximation de Weirstrass sur un segment quelconque $[a,b]$.

C. Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

On considère maintenant l'espace vectoriel G des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0,\pi]$, muni du produit scalaire défini pour tous $f,g \in G$ par : $\langle f,g\rangle_G = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$.

On note : $\left\| f \right\|_G = \sqrt{\langle f,f\rangle_G}$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $c_n \in G$ par la formule $c_n(t) = \cos(nt)$ et on note $F_n = vect(c_0,\dots,c_n)$ le sous espace vectoriel de G engendré par $(c_0,\dots,c_n)$.

On note également P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n.

8) Montrer que si p est un polynôme de degré n, la fonction $[t \mapsto p(\cos(t))]$ définie sur $[0,\pi]$ appartient à F_n.

9) Trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs telle que la suite $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit orthonormée. Déduire des théorèmes d'approximation de Weirstrass que la suite orthonormée $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

10) Soit $f \in G$, montrer que $\left\| f - P_{F_n}(f) \right\|_G$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Si de plus la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction g, montrer que $g = f$.

Pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, on définit la fonction g_x sur $[0,\pi]$ par la formule :

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \end{cases}$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les coordonnées de $P_{F_n}(g_x)$ sur la base $(c_0,c_1,\dots,c_n)$ de F_n.

En déduire que pour tout $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{\pi}{2} - \max(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t).$$

12) Montrer que pour tout $f \in E$ et $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$:

$$V^* \circ V(f)(x) = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\right)f(t)dt$$

En déduire la suite des coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on a :

$$V^* \circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\cos((2n+1)x).$$

D. Équations différentielles du type Sturm-Liouville

Soit $h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle : $(S)\begin{cases} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y(\pi/2) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$

On définit $\varphi_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la formule : $\varphi_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos((2n+1)t)$.

13) Montrer que pour tout $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $\langle V^* \circ V(f),\varphi_n\rangle = \frac{1}{(2n+1)^2}\langle f,\varphi_n\rangle$.

14) Montrer que g est solution de l'équation différentielle (S) si et seulement si $g = V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$ et que dans ce cas, on a les formules suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right)\langle g,\varphi_n\rangle = \frac{1}{(2n+1)^2}\langle h,\varphi_n\rangle \qquad \text{et} \qquad g = \sum_{n=0}^{\infty}\langle g,\varphi_n > \varphi_n$$

15) On suppose dans cette question que λ n'est pas égale au carré d'un entier impair.

Montrer que la série : $\left(\sum \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n\right)$ est normalement convergente.

Exhiber alors une solution de (S).

On suppose maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\lambda = (2p+1)^2$.

16) Montrer que si $\langle h,\varphi_p\rangle = 0$ alors (S) a une infinité de solutions, puis Exhiber l'une d'entre elles.

Que peut-on dire si $\langle h,\varphi_p\rangle \neq 0$?

FIN DU PROBLÈME

CORRIGÉ : MATH 1 ; MP ; Mines-ponts_2015

A. Opérateur de Volterra

1) Soient $f,g \in E$, c'est clair que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont deux primitives de f.

$\langle V(f),g\rangle = \int_0^{\pi/2} V(f)(x)g(x)dx = -\int_0^{\pi/2} V(f)(x)V^*(g)'(x)dx = \left[-V(f)(x)V^*(g)(x)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f(x)V^*(g)(x)dx$

$\left[-V(f)(x)V^*(g)(x)\right]_0^{\pi/2} = 0$ et $\langle V(f),g\rangle = \int_0^{\pi/2} f(x)V^*(g)(x)dx = \langle f, V^*(g)\rangle$.

2) Soient $f,g \in E$, d'aprés la question ci-dessus : $\langle V^* \circ V(f),g\rangle = \langle V(f),V(g)\rangle = \langle f, V^* \circ V(g)\rangle$.

$V^* \circ V$ est donc un endomorphisme symétrique de E.

De plus $\langle V^* \circ V(f),f\rangle = \langle V(f),V(f)\rangle \geq 0$ et si $\langle V^* \circ V(f),f\rangle = 0$ alors $V(f) = 0$ et $V(f)' = f = 0$.

$V^* \circ V$ est donc un endomorphisme symétrique défini positif de E.

Si λ est alors une valeur propre de $V^* \circ V$ et f un vecteur propre associé, alors :

$\langle V^* \circ V(f),f\rangle = \lambda\|f\|^2 > 0$ donc $\lambda > 0$.

3) $V^* \circ V(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ alors f_λ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\lambda f_\lambda' = -V(f_\lambda)$ et en dérivant encore une fois :

$\lambda f_\lambda'' = -f_\lambda$. D'où f_λ est solution sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$.

f_λ étant continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ alors f_λ'' l'est aussi et donc f_λ est de classe C^2 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

$V^* \circ V(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ alors : $f_\lambda(\pi/2) = 0$ et $\lambda f_\lambda' = -V(f_\lambda)$ alors $f_\lambda'(0) = 0$.

4) Si $\lambda > 0$, est une valeur propre de $V^* \circ V$, alors d'aprés la question prècèdente, il existe deux réels A et B tels que : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$; $f_\lambda(x) = A\cos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) + B\sin(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$.

$f_\lambda'(x) = -\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\sin(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) + \frac{B}{\sqrt{\lambda}}\cos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$ et puisuque $f_\lambda'(0) = 0$ alors $B = 0$.

D'où : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$; $f_\lambda(x) = A\cos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$ et puisuque $f_\lambda(\pi/2) = 0$ alors $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ un entier naturel impair.

Il existe alors un entier naturel n, tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Posons alors : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$; $g_n(x) = \cos((2n+1)x)$.

$V(g_n)(x) = \int_0^x \cos((2n+1)t)dt = \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$ et $V^* \circ V(g_n)(x) = \int_x^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}dt = \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$.

En conclusion les valeurs propres de $V^* \circ V$ sont les $\lambda_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$, et l'espace propre associé à chaque λ_n, est la droite vectorielle engendrée par g_n.

B. Théorème d'approximation de Weirstrass

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ n VAR indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre x.

C'est à dire : $P(X_j = 1) = x$ et $P(X_j = 0) = 1-x$.

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$; $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E(f(Z_n))$.

5) S_n suit la loi binômiale de paramètres n et x.

Autrement dit : S_n est à valeurs dans $[[0,n]]$ et $\forall k \in [[0,n]]$; $P(S_n = k) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

$$E(S_n) = \sum_{1\le k\le n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{1\le k\le n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = nx.$$

$$E(S_n^2) = \sum_{1\le k\le n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{1\le k\le n} k\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$E(S_n^2) = nx + nx\sum_{2\le k\le n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2\sum_{2\le k\le n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}$$

$$E(S_n^2) = nx + n(n-1)x^2$$

$V(S_n) = E(S_n^2) - E(S_n)^2 = nx(1-x)$.

6) $\displaystyle\sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ |Z_n-E(Z_n)|\ge\alpha}} P(Z_n = \tfrac{k}{n}) = P(|Z_n - E(Z_n)| \ge \alpha)$

D'aprés l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\displaystyle\sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{V(Z_n)}{\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}$.

L'étude de la fonction $[x \mapsto x(1-x)]$ sur $[0,1]$, donne que : $\forall x \in [0,1]\ ;\ x(1-x) \le \frac{1}{4}$.

Finalement : $\forall \alpha > 0\ ;\ \displaystyle\sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\alpha^2}$.

7) $1 = (x + (1-x))^n = \displaystyle\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f(x)$.

$B_n(f)(x) = E(f(Z_n)) = \displaystyle\sum_{0\le k\le n} f(\tfrac{k}{n}) P(S_n = k) = \sum_{0\le k\le n} f(\tfrac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$

Alors : $B_n(f)(x) - f(x) = \displaystyle\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}(f(\tfrac{k}{n}) - f(x))$.

f étant continue sur le segment $[0,1]$, donc uniformément continue sur ce segment.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, pour tous $x,y \in [0,1]$, $|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\eta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}(f(\tfrac{k}{n}) - f(x)) + \sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|<\eta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}(f(\tfrac{k}{n}) - f(x))$$

$$\left|\sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|<\eta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}(f(\tfrac{k}{n}) - f(x))\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

f étant continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée sur ce segment. Soit $M = \sup\limits_{0\le t\le 1} |f(t)|$.

Alors d'aprés la question précèdente : $\left|\displaystyle\sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\eta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}(f(\tfrac{k}{n}) - f(x))\right| \le \frac{2M}{4n\eta^2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2M}{4n\eta^2} = 0$, il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \ge N\ ;\ \frac{2M}{4n\eta^2} \le \frac{\varepsilon}{2}$.
D'où : $\forall n \ge N\ ;\ \forall x \in [0,1]\ ;\ |B_n(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon$.
$(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers f uniformément sur $[0,1]$.

C. Développement de $\mathbf{V}^* \circ \mathbf{V}(f)$ en série trigonométrique

8) Dans cette question, puisque, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous espaces vectoriels de G, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n(t) = \cos^n(t)$ définit un élèment de F_n.

$$\cos^n(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)t} = \frac{1}{2^n} \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} \cos(|2k-n|t).$$

puisque $\forall k \in [[0,n]]$; $|2k-n| \in [[0,n]]$, on déduit que $h_n \in F_n$.

9) $\langle c_n, c_m >_G = \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(n+m)t + \cos(n-m)t)dt$.
Si $n \neq m$; $\langle c_n, c_m >_G = 0$.
Si $n = m = 0$; $\langle c_0, c_0 >_G = \pi$.
Si $n = m \neq 0$; $\langle c_n, c_n >_G = \frac{\pi}{2}$.
On pose : $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\forall n \geq 1$; $\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. La suite $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.
Soit $f \in G$, et pour tout $x \in [-1,1]$; $g(x) = f(\arccos(x))$.
g est continue sur $[-1,1]$, donc d'aprés le théorème de Weirstrass, il, existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels qui converge vers g uniformément sur $[-1,1]$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe N un entier naturel tel que : $\forall n \geq N$; $\forall x \in [-1,1]$; $|g(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$.
$\forall n \geq N$; $\forall y \in [0,\pi]$; $|g(\cos(y)) - P_n(\cos(y)| = |f(y) - P_n(\cos(y)| \leq \varepsilon$.
f est alors limite uniforme sur $[0,\pi]$ d'une suite de $vect(h_n; n \in \mathbb{N}) \subset vect(c_n; n \in \mathbb{N})$. (Question **8**)
Finalement : $vect(c_n; n \in \mathbb{N})$ est dense dans G, pour la norme de la convergence uniforme.
D'autre part : $\forall f \in G$; $\|f\|_G = \sqrt{\int_0^\pi f(t)^2 dt} \leq \sqrt{\pi}\,\|f\|_\infty$. D'où $vect(c_n; n \in \mathbb{N})$ est dense dans G pour la norme $\|.\|_G$, alors la suite $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale totale.

10) Soit $f \in G$, d'aprés le théorème de Pythagore :
$$\|f - P_{F_n}(f)\|_G^2 = \|f\|_G^2 - \|P_{F_n}(f)\|_G^2 = \|f\|_G^2 - \sum_{0\leq k\leq n} \alpha_k^2 \langle f, c_k\rangle^2$$
La suite $(\|f - P_{F_n}(f)\|_G)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
D'autre part : Soit $\varepsilon > 0$, daprés la question **9**, il existe $\varphi \in vect(c_n; n \in \mathbb{N})$ tel que : $\|f - \varphi\|_G \leq \varepsilon$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ et des réels $\beta_0, \ldots, \beta_N$ tels que : $\varphi = \sum_{0\leq k\leq N} \beta_k c_k \in F_N$.
Mais $\|f - P_{F_N}(f)\|_G \leq \|f - \varphi\|_G \leq \varepsilon$.
D'où il existe un entier naturel N, tel que : $\forall n \geq N$; $\|f - P_{F_n}(f)\|_G \leq \|f - P_{F_N}(f)\|_G \leq \varepsilon$.
La suite $(\|f - P_{F_n}(f)\|_G)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers 0.

On suppose maintenant que la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction g, puisque chaque $P_{F_n}(f)$ est continue sur $[0,\pi]$, g l'est aussi, donc $g \in G$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $\|P_{F_n}(f) - g\|_G \leq \sqrt{\pi}\,\|P_{F_n}(f) - g\|_\infty$
la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers g pour la norme $\|.\|_G$, alors par unicité de la limite : $f = g$.

11) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et tout $t \in [0,\pi]$, $g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$.

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \max(x, \pi - t) - \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}.$$

C'est clair que g_x est continue sur $[0,\pi]$, donc $g_x \in G$.

$P_{F_n}(g_x) = \sum_{0\leq k\leq n} \alpha_k^2 \langle g_x, c_k\rangle c_k$.
$\langle g_x, c_k\rangle = \int_0^\pi g_x(t)\cos(kt)dt = \int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)dt + \int_{\pi/2}^\pi g_x(t)\cos(kt)dt$.

On pose : $u = \pi - t$. $\int_{\pi/2}^\pi g_x(t)\cos(kt)dt = \int_0^{\pi/2} g_x(\pi - u)\cos(k(\pi - u))du = -(-1)^k \int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)dt$.

$\langle g_x, c_k\rangle = (1-(-1)^k)\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)dt$. Remarquons que : $\langle g_x, c_{2k}\rangle = 0$.

$$\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(2k+1)tdt = \int_0^{x}(\frac{\pi}{2}-x)\cos(2k+1)tdt + \int_x^{\pi/2}(\frac{\pi}{2}-t)\cos(2k+1)tdt$$

$$\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(2k+1)tdt = \left[(\frac{\pi}{2}-x)\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}\right]_0^x + \left[(\frac{\pi}{2}-t)\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}\right]_x^{\pi/2} + \int_x^{\pi/2}\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}dt = \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Finalement : $\langle g_x, c_{2k}\rangle = 0$ et $\langle g_x, c_{2k+1}\rangle = 2\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

$$P_{F_n}(g_x) = \sum_{2k+1\le n}\alpha_{2k+1}^2\langle g_x, c_{2k+1}\rangle c_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{2k+1\le n}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}c_{2k+1}.$$

La série $\left(\sum_k \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}c_{2k+1}(t)\right) = \left(\sum_k \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)t)\right)$ converge normalement et uniformément pour $t\in[0,\pi]$, alors d'aprés la question **10**, la suite $(P_{F_n}(g_x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g_x uniformément sur $[0,\pi]$.

Pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $g_x(t) = \lim_{n\to\infty}P_{F_n}(g_x)(t) = \frac{\pi}{2}-\max(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)$.

12) Soient $f\in E$ et $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$. $V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$

$$V^*\circ V(f)(x) = \int_x^{\pi/2}V(f)(t)dt = \left[tV(f)(t)\right]_x^{\pi/2} - \int_x^{\pi/2}tf(t)dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}f(t)dt - x\int_0^x f(t)dt - \int_x^{\frac{\pi}{2}}tf(t)dt$$

$$V^*\circ V(f)(x) = \int_0^x(\frac{\pi}{2}-x)f(t)dt + \int_x^{\pi/2}(\frac{\pi}{2}-t)f(t)dt = \int_0^{\pi/2}(\frac{\pi}{2}-\max(x,t))f(t)dt.$$

Utilisons alors la question précèdente :

$$V^*\circ V(f)(x) = \int_0^{\pi/2}\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)f(t)dt$$

f étant continue sur le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$, donc bornée sur ce segment, la série à l'intérieur de l'intégrale est alors normalement et uniformément convergente pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$: D'où

$$V^*\circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}f(t)dt\right)\cos((2n+1)x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)\cos((2n+1)x)$$

Avec : $\forall n\in\mathbb{N}$; $a_n(f) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}f(t)dt.$

D. Équations différentielles du tupe Sturn-Liouville

Soit $h\in E$, $\lambda\in\mathbb{R}$, et l'équation différentielle : $(S)\begin{cases} y''+\lambda y+h=0 \\ y(\pi/2)=0 \text{ et } y'(0)=0\end{cases}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi_n\in E$, défini par : $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$; $\varphi_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos((2n+1)t)$.

13) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $f\in E$. D'aprés la partie **A**, on a :
$\langle V^*\circ V(f),\varphi_n\rangle = \langle f, V^*\circ V(\varphi_n)\rangle$ et $V^*\circ V(\varphi_n) = \frac{1}{(2n+1)^2}\varphi_n$; alors : $\langle V^*\circ V(f),\varphi_n\rangle\frac{1}{(2n+1)^2}\langle f,\varphi_n\rangle$.

14) Soit $g\in E$, par passsage à la primitive s'annulant en 0 et puis à la primitive s'annulant en $\frac{\pi}{2}$ de cette primitive, on obtient :

g est solution de (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} g''+\lambda g+h=0 \\ g(\pi/2)=0 \text{ et } g'(0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'+\lambda V(g)+V(h)=0 \\ g(\pi/2)=0\end{cases}$

g est solution de (S) $\Leftrightarrow g-\lambda V^*\circ V(g) - V^*\circ V(h) = 0$.

Si alors g est une solution de (S) et $n\in\mathbb{N}$; $\langle g-\lambda V^*\circ V(g)-V^*\circ V(h),\varphi_n\rangle = 0$.

En utilisant alors la question précèdente : $\langle g,\varphi_n\rangle - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\langle g,\varphi_n\rangle - \frac{1}{(2n+1)^2}\langle h,\varphi_n\rangle = 0.$

D'où $\left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right)\langle g,\varphi_n\rangle = \frac{1}{(2n+1)^2}\langle h,\varphi_n\rangle.$

D'autre part, en utilisant la question **12** : $g = \lambda V^*\circ V(g) + V^*\circ V(h) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n(g) + a_n(h))\varphi_n$

avec convergence normale et uniforme de cette série de somme g.

Pour tous $n,m\in\mathbb{N}$; $\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(2n+1)t\cos(2m+1)tdt\left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & n\neq m \\ 1 & \text{si} & \text{non}\end{array}\right\}.$

Alors : pour tout entier naturel m,

$$\langle g,\varphi_m\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n(g) + a_n(h))\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\lambda a_m(g) + a_m(h)).$$

Finalement : $g = \sum_{n=0}^{\infty}\langle g,\varphi_n\rangle\varphi_n.$

15) Pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$; $\left|\frac{1}{(2n+1)^2-\lambda}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n(t)\right| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left|\frac{1}{(2n+1)^2-\lambda}\right|\|h\|$

où l'on a utilisé l'inégalité de cauchy Schwarz sur E muni de son produit scalaire.

D'où la série $\left(\sum\frac{1}{(2n+1)^2-\lambda}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n\right)$ converge normalement sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Un raisonnement comme celui appliqué à g dans la question **14**, permet de dire que

$h = \sum_{n=0}^{\infty}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n$ avec convegence normale et uniforme sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-\lambda}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n(x)$ ainsi que la série de ses dérivées terme à terme

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(2n+1)}{((2n+1)^2-\lambda)}\langle h,\varphi_n\rangle\sin((2n+1)x)$ et la série de ses dérivées secondes terme à terme

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(2n+1)^2}{((2n+1)^2-\lambda)}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n(x)$; sont des séries de fonctions de classe C^2 aussi normalement

convergentes sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Alors g est de classe C^2 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $g'' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(2n+1)^2}{((2n+1)^2-\lambda)}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n.$

$g'' + \lambda g = -\sum_{n=0}^{\infty}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n = -h.$ de plus $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $g'(0) = 0.$ ainsi g est une solution de (S).

16) On suppose ici que $\lambda = (2p+1)^2$ pour un certain entier naturel p.

$$(S)\left\{\begin{array}{c} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } y'(0) = 0\end{array}\right. .$$

L'équation homogène associée à ce système a pour solution générale :

$y_H(t) = \alpha\cos(2p+1)t + \beta\sin(2p+1)t$

La solution générale de l'équation sans conditions initiales est d'aprés les conditions de Lagrange de la forme : $z(t) = \alpha(t)\cos(2p+1)t + \beta(t)\sin(2p+1)t$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha'(t)\cos(2p+1)t + \beta'(t)\sin(2p+1)t = 0 \\ \alpha'(t)\sin(2p+1)t - \beta'(t)\cos(2p+1)t = \frac{h(t)}{(2p+1)}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha'(t) = \frac{h(t)\sin(2p+1)t}{(2p+1)} \\ \beta'(t) = \frac{-h(t)\cos(2p+1)t}{(2p+1)}\end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{l} \alpha(t) = a + \int_0^t\frac{h(x)\sin(2p+1)x}{(2p+1)}dx \\ \beta(t) = b - \int_0^t\frac{h(x)\cos(2p+1)x}{(2p+1)}dx\end{array}\right.$$

$$z(t) = \left(a + \int_0^t \frac{h(x)\sin(2p+1)x}{(2p+1)}dx\right)\cos(2p+1)t + \left(b - \int_0^t \frac{h(x)\cos(2p+1)x}{(2p+1)}dx\right)\sin(2p+1)t.$$

$$z'(t) = -(2p+1)\left(a + \int_0^t \frac{h(x)\sin(2p+1)x}{(2p+1)}dx\right)\sin(2p+1)t + (2p+1)\left(b - \int_0^t \frac{h(x)\cos(2p+1)x}{(2p+1)}dx\right)\cos(2p+1)t$$
$$+ \frac{h(t)\sin(2p+1)t}{(2p+1)}\cos(2p+1)t - \frac{h(t)\cos(2p+1)t}{(2p+1)}\sin(2p+1)t$$
$$z'(0) = 0 = (2p+1)b.$$
$$z(t) = \left(a + \int_0^t \frac{h(x)\sin(2p+1)x}{(2p+1)}dx\right)\cos(2p+1)t - \left(\int_0^t \frac{h(x)\cos(2p+1)x}{(2p+1)}dx\right)\sin(2p+1)t.$$
$$z(\tfrac{\pi}{2}) = 0 = (-1)^{p+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h(x)\cos(2p+1)x}{(2p+1)}dx.$$
Si $< h,\varphi_p\rangle \neq 0$, le système (S) n'a pas de solution.
Si $< h,\varphi_p\rangle = 0$, le système (S) admet une infinité de solutions données par : $(Z_a)_{a\in\mathbb{R}}$, avec :
$$\forall a \in \mathbb{R}\ ;\ \forall t \in [0,\tfrac{\pi}{2}]\ ;\ Z_a(t) = \left(a + \int_0^t \frac{h(x)\sin(2p+1)x}{(2p+1)}dx\right)\cos(2p+1)t + \left(\int_t^{\pi/2} \frac{h(x)\cos(2p+1)x}{(2p+1)}dx\right)\sin(2p+1)t.$$

Remarque :

(i) Un travail analogue à celui de la question **15**), prouve que si $\langle h,\varphi_p\rangle = 0$, alors la fonction
$$g(x) = \sum_{\substack{n=0\\ n\neq p}}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-\lambda}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n(x)$$
définit une solution de (S), et par conséquent pour tout réel a, la fonction
$$g_a(x) = g(x) + a\cos(2p+1)x$$
est aussi une solution de (S). L'équation (S) admet alors une infinité de solutions.

(ii) Si g est une solution de (S), alors d'aprés la question **14**)
$$\left(1 - \frac{\lambda}{(2p+1)^2}\right)\langle g,\varphi_p\rangle = \frac{1}{(2p+1)^2}\langle h,\varphi_p\rangle = 0$$
donc nécessairement $\langle h,\varphi_p\rangle = 0.$ (S) n'admet donc pas de solution lorsque $\langle h,\varphi_p\rangle \neq 0.$

Question :

Quel lien existe entre les fonctions Z_a et g_a ?
On pourra utiliser le théorème de Cauchy Lipschitz.