

A. Questions préliminaires.

1) Soit $f \in E$. Notons $g(t, x) = e^{itx} f(x)$. On a :

- $x \mapsto g(x, t)$ continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour tout réel t .
 - $t \mapsto g(x, t)$ continue sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x
 - $|g(x, t)| = |f(x)| = f(x)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ et $x \mapsto f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Donc ϕ_f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Supposons désormais que f admette un moment d'ordre 1. Comme $\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = ixg(x, t)$ on a :

- $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour tout réel t .
- $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ continue sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x
- $|\frac{\partial g}{\partial t}(x, t)| = |xf(x)| = |x|f(x)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ et $x \mapsto |x|f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc ϕ_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\phi'_f(t) = i \int_{\mathbb{R}} e^{itx} x f(x) dx$

Supposons désormais que f admette un moment d'ordre 2. Comme $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -x^2 g(x, t)$ on prouve de la même manière que ϕ_f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $\phi''_f(t) = - \int_{\mathbb{R}} e^{itx} x^2 f(x) dx$

L'itération est claire :

si f admet des moments jusqu'à l'ordre k alors ϕ_f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et $\phi_f^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} e^{itx} x^k f(x) dx$. $\square$

2) L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $\varphi : t \mapsto e^{it}$ à l'ordre $(n-1)$ entre 0 et x (bien licite puisque φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) fournit (en notant $J = [0, x]$ ou $J = [x, 0]$ suivant le signe de x)

$$|\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \varphi^{(m)}(0) \frac{x^m}{m!}| \leq \sup_{t \in J} |\varphi^{(n)}(t)| \times \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{n!} \text{ car } \varphi^{(n)}(t) = (i)^n e^{it} \text{ c'est à dire}$$

$$|e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!}| \leq \frac{|x|^n}{n!} \text{ pour tout réel } x \text{ et tout entier } n \geq 1. \quad \square$$

3) $e^{-iat} - e^{-ibt} = e^{-i(a+b/2)t} \times 2i \sin\left(\frac{b-a}{2}t\right) \sim i(b-a)t$ lorsque $t \rightarrow 0$.

Il en découle que $h_{a,b}$ est bien continue en 0 et comme elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes opératoires :
La fonction $h_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

4) Si $t = 0$ l'inégalité est évidente et sinon elle résulte immédiatement de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\varphi : u \mapsto e^{iu}$ entre ta et tb . $\square$

5) $e^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ série à termes positifs et en particulier $e^k \geq u_k = \frac{k^k}{k!}$ $\square$

La fonction ϕ_f caractérise f .

6) Par parité $R(\theta, T) = 2 \int_0^T \frac{\sin(\theta t)}{t} dt$.

Si $\theta \neq 0$ le changement $u = \theta t$ fournit $R(\theta, t) = 2S(\theta T)$. Égalité encore vraie si $\theta = 0$ (valeur commune nulle).
Ainsi $R(\theta, t) = 2S(\theta t)$ pour tout $(\theta, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ $\square$

7) Il vient $\lim_{X \rightarrow +\infty} S(X) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} S(X) = -\frac{\pi}{2}$ par parité. Il découle alors de la question précédente que :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} R(x, T) - R(t, T) = \begin{cases} 0 & \text{si } (xy > 0) & \text{ou } (x = y = 0) \\ 2\pi & \text{si } (y < 0 < x) \\ -2\pi & \text{si } (x < 0 < y) \\ \pi & \text{si } (x > 0 \text{ et } y = 0) & \text{ou } (x = 0 \text{ et } y < 0) \\ -\pi & \text{si } (x < 0 \text{ et } y = 0) & \text{ou } (x = 0 \text{ et } y > 0) \end{cases} \quad \square$$

8) Notons $g(t, x) = h_{a,b}(t) e^{itx} f(x)$ de sorte que $I_T = \int_{\text{DEF}} \int_{-T}^T h_{a,b}(t) \phi_f(t) dt = \int_{-T}^T \left(\int_{\mathbb{R}} g(t, x) dx \right) dt$. Alors :

- g est bien continue sur $[-T, T] \times \mathbb{R}$ car $h_{a,b}$ est continue.
- g est intégrable sur $[-T, T] \times \mathbb{R}$ car $|g(t, x)| \leq (b-a)|f(x)|$ intégrable sur $[-T, T] \times \mathbb{R}$ (Cf question 4).
- Pour tout $t \in [-T, T]$ la fonction $g(t, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car majorée en module par $(b-a)|f(x)|$
- $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(t, x) dx = h_{a,b}(t)\phi_f(t)$ est continue sur $[-T, T]$ car $h_{a,b}$ est continue ainsi que ϕ_f (Cf question 3 et début de la question 1) donc intégrable sur $[-T, T]$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $g(\cdot, x)$ est intégrable sur $[-T, T]$ car continue.
- $x \mapsto \int_{-T}^T g(x, t) dt = f(x) \int_{-T}^T h_{a,b}(t)e^{ixt} dt$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $(t, x) \mapsto h_{a,b}(t)e^{ixt}$ est continue sur $[-T, T]$ et théorème de continuité d'une intégrale propre à paramètres) et est intégrable sur $\mathbb{R}$ car majorée en module par $2T(b-a)|f(x)|$ (Cf question 4)

On peut donc appliquer le théorème de Fubini et $I_T = \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) \int_{-T}^T h_{a,b}(t)e^{ixt} dt \right) dx \stackrel{\text{DEF}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) H_T(x) dx$

$$\text{Or } H_T(x) = \int_{-T}^T \frac{e^{i(x-a)t} - e^{i(x-b)t}}{it} dt = \int_{-T}^T \frac{\sin((x-a)t) - \sin((x-b)t)}{t} dt = R(x-a, T) - R(x-b, T)$$

car la contribution des cosinus est nulle par imparité.

$$\text{ainsi } I_T = \int_{\mathbb{R}} (R(x-a, T) - R(x-b, T)) f(x) dx \stackrel{\text{DEF}}{=} \int_{\mathbb{R}} \psi_T(x) dx$$

Considérons la famille de fonctions $(\psi_T)_{T \in \mathbb{R}^+}$.

- La fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ (intégrale fonction de sa borne supérieure) et admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ donc est bornée sur $\mathbb{R}$. Il en va donc de même de la fonction R sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ d'après la question 6. Ainsi $\psi_T(x) \leq M|f(x)|$ pour tout $T > 0$ et tout réel x de sorte que la famille $(\psi_T)_{T \in \mathbb{R}^+}$ est dominée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Examinons la limite simple (éventuelle) de la famille (ψ_T) lorsque $T \rightarrow +\infty$.
 - Si $x > b$ ou $x < a$ cette limite existe et est nulle par la question 7.
 - Si $a < x < b$ cette limite vaut $2\pi f(x)$ toujours par la question 7.

Le théorème de la convergence dominée montre alors que $\lim_{T \rightarrow +\infty} I_T = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{]a,b[}(x) dx = 2\pi \int_a^b f(x) dx$

$$\text{En conclusion } \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T h_{a,b}(t) \phi_f(t) dt = \int_a^b f(t) dt \quad \square$$

Remarque 1 : on aurait pu utiliser une version plus légère du théorème de Fubini pour permuter une intégrale propre et une intégrale impropre :

- $x \mapsto g(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [-T, T]$
- $t \mapsto g(t, x)$ est continue sur $[-T, T]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- On a $|g(t, x)| \leq (b-a)|f(x)|$ pour tout $(t, x) \in [-T, T] \times \mathbb{R}$ et $(b-a)|f(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Cela suffit à assurer la permutation des intégrales imbriquées.

Remarque 2 : si on ne veut pas utiliser la version “famille” du théorème de la convergence dominée, il suffit de considérer une suite (T_n) tendant vers $+\infty$ et d'utiliser la caractérisation séquentielle de l'existence et de la valeur d'une limite.

- 9) Si $\phi_f = \phi_g$ il découle en particulier de la question précédente que $\int_0^x (f-g) = 0$ pour $x > 0$ et $\int_x^0 (f-g) = 0$

pour $x < 0$ donc que $\int_0^x (f-g) = 0$ pour tout x donc par dérivation (licite car $f-g$ est continue) que $f(x) = g(x)$ pour tout réel x .

La terminologie *fonction caractéristique* est donc bien justifiée. $\square$

C. La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

- 10) f_0 est bien à valeurs positives ou nulles et en écrivant $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x\right)$ pour $x > 0$ on obtient immédiatement que f_0 est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs le changement $x \rightarrow u = \ln x$ qui est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ montre que $\int_0^{+\infty} f_0(x) dx$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} du$ sont de même nature et éventuellement égales. Donc en l'occurrence (vu le résultat admis en préambule) convergentes et de valeur 1. Comme f_0 est nulle sur $]-\infty, 0]$, on a finalement $\int_{\mathbb{R}} f_0(x) dx = 1$. Ainsi $f_0 \in E$ $\square$

11) Le même changement montre que $\int_{\mathbb{R}} x^k f_0(x) dx = \int_0^{+\infty} x^k f_0(x) dx$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ku - \frac{u^2}{2}) du$ sont de même nature et éventuellement égales donc, comme précédemment, convergent et valent $\exp(\frac{k^2}{2})$.

En outre $|x^k|f_0(x) = x^k f_0(x) \geq 0$ donc $x \mapsto |x|^k f(x)$ est bien intégrable.

En conclusion $a_k(f)$ existe pour tout entier k et $a_k(f) = \exp(\frac{k^2}{2})$ $\square$

12) Notons une légère faute d'énoncé : il eût fallu écrire $f_a(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $f_a(x) = f_0(x)(1 + a \sin(2\pi \ln x))$ pour $x > 0$. Alors :

- f_a est bien positive ou nulle car $-1 \leq a \leq 1$
- Pour $x > 0$ la fonction $x \mapsto 1 + a \sin(2\pi \ln x)$ est bornée et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = 0$ on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_a(x) = 0$ et ainsi f_a est bien continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout entier k , $x \mapsto x^k f_a(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^k f_0(x)$ l'est et la fonction $x \mapsto 1 + a \sin(2\pi \ln x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

- Pour tout entier k notons $\Delta_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f_a(x) dx - \int_{\mathbb{R}} x^k f_0(x) dx$

$$\text{Il vient } \Delta_k = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}^+} x^k \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right) \exp(i2\pi \ln x) \frac{dx}{x} \right)$$

Le changement $x \mapsto u = \ln x$ admissible car $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$ montre que

$$\Delta_k = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left((k + 2i\pi)u - \frac{u^2}{2}\right) du \right) = a \operatorname{Im} \left(\exp\left(\frac{(k + 2i\pi)^2}{2}\right) \right) = a \exp\left(\frac{k^2 - 4\pi^2}{2}\right) \sin(2k\pi) = 0$$

Ainsi $\Delta_k = 0$ pour tout entier k (ce qui prouve en particulier avec $k = 0$ que $f_a \in E$).

En conclusion les fonctions f_a pour $a \in [-1, 1]$ appartiennent toutes à E , ont des moments à tous les ordres qui ne dépendent pas de a . La suite des moments ne caractérise donc pas toujours $f \in E$. $\square$

D. Une condition sur la suite $a_k(f)$

13) Les deux fonctions $x \mapsto |x|^k \sqrt{f(x)}$ et $x \mapsto |x|^{k+1} \sqrt{f(x)}$ appartiennent à l'espace préhilbertien des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Schwarz donne alors l'inégalité demandée. $\square$

14) Si k est pair on a $b_k(f) = a_k(f)$ donc $\frac{b_k(f)^{1/k}}{k}$ est majoré par M .

Si $k = 2m + 1$ est impair on a d'après la question précédente, $\frac{b_{2m+1}(f)^{1/(2m+1)}}{2m+1} \leq \frac{a_{2m}(f)^{1/(4m+2)} a_{2m+2}(f)^{1/(4m+2)}}{2m+1}$

Or d'après la propriété (U) on $a_{2m}(f) \leq (2m)^{2m} M^{2m}$ et $a_{2m+2}(f) \leq (2m+2)^{2m+2} M^{2m+2}$. Donc :

$$\frac{b_{2m+1}(f)^{1/(2m+1)}}{2m+1} \leq \frac{(2m)^{2m/(4m+2)} (2m+2)^{(2m+2)/(4m+2)} M}{2m+1} = \frac{(m)^{2m/(4m+2)} (m+1)^{(2m+2)/(4m+2)}}{2m+1} 2M = \alpha_m 2M$$

Or $m^{2m} (m+1)^{2m+2} \leq (m+1)^{2m} (m+1)^{2m+2} = (m+1)^{4m+2} \leq (2m+1)^{4m+2}$ donc $\alpha_m \leq 1$

En conclusion $\frac{b_k(f)^{1/k}}{k} \leq 2M$ pour tout entier k . $\square$

15) D'après la question 1), on a pour tout réel t et tout entier k , $|\phi_f^{(k)}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |x|^k f(x) dx = b_k(f)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors immédiatement l'inégalité proposée. $\square$

16) $\frac{|h|^n}{n!} b_n(f) \leq \frac{n^n}{n!} (2M|h|)^n \leq (2eM|h|)^n$ d'après les questions 14 et 5.

Il résulte alors de la question précédente que, si $|h| < A = \frac{1}{\operatorname{DEF} 2eM}$, pour tout réel x la série $\sum_0^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}(x)$ converge et a pour somme $\phi_f(x+h)$ $\square$

17) Comme $a_k(g) = a_k(f)$ pour tout entier k , la fonction g vérifie également la propriété (U) avec le même M donc la même propriété que dans la question précédente avec le même A .

Or pour $t = 0$ on a d'après la question 1, $\phi_f^{(n)}(0) = i^n a_n(f) = i^n a_n(g) = \phi_g^{(n)}(0)$.

Donc pour $|h| < A$ et en particulier pour $h \in [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$ on a $\phi_f(h) = \sum_0^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_f^{(n)}(0) = \sum_0^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \phi_g^{(n)}(0) = \phi_g(h)$

Ainsi la propriété de l'énoncé est vraie pour $\ell = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang $\ell \geq 1$ i.e. $\phi_f(t) = \phi_g(t)$ pour $t \in [-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}]$.

On a alors $\phi_f^{(n)}(\frac{\ell A}{2} - \frac{A}{4}) = \phi_g^{(n)}(\frac{\ell A}{2} - \frac{A}{4})$ donc en appliquant la question 16 à f et g en $x = \frac{\ell A}{2} - \frac{A}{4}$ il vient que ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $]\frac{\ell A}{2} - \frac{5A}{4}, \frac{\ell A}{2} + \frac{3A}{4}[$ donc a fortiori sur $[\frac{\ell A}{2}, \frac{(\ell+1)A}{2}]$

De même on prouve en appliquant la question 16 en $-\frac{\ell A}{2} + \frac{A}{4}$ que ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $[-\frac{(\ell+1)A}{2}, -\frac{\ell A}{2}]$

Ainsi finalement ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $[-\frac{(\ell+1)A}{2}, \frac{(\ell+1)A}{2}]$ et la propriété est donc vraie au rang $\ell + 1$.

La propriété est donc établie par récurrence pour tout entier ℓ . $\square$

18) Il découle évidemment de la question précédente que ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $\mathbb{R}$ tout entier donc que $g = f$ d'après la partie B.

Une fonction de E admettant des moments de tous ordres et vérifiant la propriété (U) est entièrement caractérisée par la suite de ses moments. $\square$

E. Application

19)• Supposons que f existe.

Une récurrence immédiate fournit $a_{2n}(f) = (2n-1)!! a_0(f) = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{2^n}$

Donc $a_{2n}(f) \leq \frac{(2n)^n}{2^n} = n^n$ d'où $\frac{a_{2n}(f)^{1/2n}}{2n} \leq \frac{\sqrt{n}}{2n} \leq \frac{1}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$

Donc f vérifie la propriété (U) avec $M = \frac{1}{2}$ ce qui prouve déjà que si f existe elle est unique.

D'après la question 16, ϕ_f est développable en série entière au voisinage de 0 (sur $] -A, A[$) et :

$$\phi_f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (i)^k a_k(f) \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^n = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ pour } x \in] -A, A[$$

Considérons la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$. D'après le résultat admis en préambule :

g appartient bien à E et $\phi_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ixu) \exp(-\frac{u^2}{2}) du = \exp(-\frac{x^2}{2})$ pour tout réel x

Première solution :

ϕ_f et ϕ_g coïncident sur un voisinage de 0 donc $a_k(f) = (i)^k \phi_f^{(k)}(0) = (i)^k \phi_g^{(k)}(0) = a_k(g)$.

Il résulte de la partie précédente que $f = g$ en d'autres termes si le système admet une solution il s'agit de la fonction g .

Seconde solution :

ϕ_f et ϕ_g sont deux fonctions développables en série entière au voisinage de tout réel x et coïncident sur un voisinage de 0 donc classiquement sont égales.

• Réciproquement la fonction g appartient bien à E et admet des moments de tous ordres puisque $x \mapsto x^k g(x)$ est clairement intégrable sur $\mathbb{R}$ car $x^k g(x) = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de l'infini.

Par raison de parité on a bien $a_{2k+1}(g) = 0$ pour tout entier k . Par ailleurs par parties :

$$\int_{-X}^X x^{2k} g(x) dx = \int_{-X}^X x^{2k-1} g(x) x dx = [-x^{2k-1} g(x)] + (2k-1) \int_{-X}^X x^{2k-2} g(x) dx$$

donc par passage à la limite quand $X \rightarrow +\infty$ il vient $a_{2k}(g) = (2k-1)a_{2k-2}(g)$.

Donc g est bien solution du système.

• Conclusion : le système admet une unique solution : $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$

_____ FIN _____