Corrigé de ENSAI 2001 (M.P.) Math 2

Luc Verschueren
Lycée Daudet Nîmes

*N*ote : ce corrigé est basé sur l'hypothèse d'une erreur d'énoncé à la question III 2 a) où l'on suppose qu'il faudrait lire : $h(x) = \sum_0^{+\infty} n! a_n x^n$ et non $h(x) = \sum_0^{+\infty} n! a_n x^{n+1}$

Partie I

1. a. La somme partielle de la suite géométrique est $U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{n+2}\right]$ et $0 \leqslant U_n \leqslant 1$

La série entière de coefficients $a_n = \dfrac{U_n}{n!}$ est donc de rayon de convergence infini, d'ailleurs on reconnaît :
$U(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} [1 + (-1)^n] \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}]$ donc $U(x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}\, U(x) = 1$

La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est B-sommable : U est définie sur $\mathbb{R}$, $U(x) = \mathrm{ch}(x)$ et $S_B(u) = \dfrac{1}{2}$

1. b. La série entière de coefficients $a_n = \dfrac{u_n}{n!}$ est encore de rayon de convergence infini :
$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x}$ et $\displaystyle\int_0^Y \mathrm{e}^{-x}\, u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{e}^{-2Y}\right]$.

La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est C-sommable et $S_C(u) = \dfrac{1}{2}$

2. a. La somme partielle de la suite géométrique est $U_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$

Si $a \neq 1$ alors $U_n = \dfrac{1}{1-a}\left[1 - a^{n+1}\right]$, on retrouve un rayon de convergence infini et :
$U(x) = \dfrac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{+\infty} [1 - a.a^n] \dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{1}{1-a}[\mathrm{e}^x - a.\mathrm{e}^{ax}]$

donc $\mathrm{e}^{-x}\, U(x)$ a une limite réelle si et seulement si $a < 1$ et cette limite vaut $\dfrac{1}{1-a}$

Si $a = 1$ alors $U_n = n + 1$ et $U(x) = \mathrm{e}^x + x.\mathrm{e}^x$ donc $\mathrm{e}^{-x}\, U(x) = 1 + x$

$\big($ la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est B-sommable$\big) \iff (a < 1)$ et alors $S_B(u) = \dfrac{1}{1-a}$

2. b. $u(x) = \mathrm{e}^{ax}$ donc pour $a \neq 1$: $\displaystyle\int_0^Y \mathrm{e}^{-x}\, u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-a}\left[1 - \mathrm{e}^{(a-1)Y}\right]$ et pour $a = 1$: $\displaystyle\int_0^Y \mathrm{e}^{-x}\, u(x)\,\mathrm{d}x = Y$

$\big($ la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est C-sommable$\big) \iff (a < 1)$ et alors $S_C(u) = \dfrac{1}{1-a}$

Partie II

1. Notons que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme, c'est à dire constamment nulle à partir d'un certain rang, alors $u(x)$ est aussi une fonction polynôme, définie sur $\mathbb{R}$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $M \neq 0$, la série entière de coefficient $b_n = \dfrac{M}{n!}$ est de rayon de convergence infini (car $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{1}{n+1} \to \ell = 0$ et le critère de d'Alembert s'applique, donc $R = \dfrac{1}{\ell}$).
Par majoration $\left|u_n \dfrac{x^n}{n!}\right| \leqslant M\dfrac{|x|^n}{n!}$, la série $\left(\sum \dfrac{u_n}{n!}x^n\right)$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$,
la série entière u est définie (et C^∞) sur $\mathbb{R}$.
2. Si la série $(\sum u_n)$ est convergente, par la condition nécessaire de convergence, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc comme toute suite convergente est bornée : avec II.1. la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$.
De même la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente (définition de série convergente) donc bornée, et II.1. appliquée à $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assure que la fonction U est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Si la série $(\sum u_n)$ est convergente, U est définie sur $\mathbb{R}$, et si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$, alors : $U_n \to 0$ et donc :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0) \Longrightarrow (|U_n| < \varepsilon)$
on peut alors décomposer : $|\mathrm{e}^{-x}.U(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}\left|\sum_{n=0}^{+n_0} U_n \dfrac{x^n}{n!}\right| + \mathrm{e}^{-x}.\varepsilon.\sum_{n=n_0}^{+\infty} \dfrac{|x|^n}{n!}$
Le second terme est majoré, indépendamment de $x \geqslant 0$ car : $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x}.\varepsilon.\sum_{n=n_0}^{+\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x}.\varepsilon.\mathrm{e}^{|x|} = \varepsilon$

Le premier terme est le quotient de l'exponentielle ($x \to \mathrm{e}^x$) et d'un polynôme, la limite quand $x \to \infty$ est donc nulle, ce terme est donc inférieur à ε pour x suffisamment grand.
Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (x \geqslant x_0) \Longrightarrow (|\mathrm{e}^{-x}.U(x)| < 2\,\varepsilon)$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi B-sommable et $S_B(u) = 0$

Dans le cas général, on peut reprendre le raisonnement ci-dessus, avec $U = U\,\mathrm{e}^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ et donc

$|\mathrm{e}^{-x}.U(x) - U| = \mathrm{e}^{-x}\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(U_n - U)\dfrac{x^n}{n!}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x}\left|\sum\limits_{n=0}^{+n_0}(U_n - U)\dfrac{x^n}{n!}\right| + \mathrm{e}^{-x}.\varepsilon.\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\dfrac{|x|^n}{n!}$ et le reste suit.

On peut aussi varier les arguments, et utiliser une linéarité : considérons la suite de terme général $v_n = U_n - U$.
On utilise le résultat précédent pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 0, et ainsi B-sommable avec :
$S_B(v) = \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,V(x) = 0$
$V(x) = U(x) - U.\mathrm{e}^x$ donc $\mathrm{e}^{-x}.U(x) = \mathrm{e}^{-x}.V(x) + U$ tend vers U quand $x \to \infty$

Si la série $(\sum u_n)$ est convergente de somme totale U, la suite est B-sommable et $S_B(u) = U$

4. Une série absolument convergente est convergente et avec II.2., la fonction U est définie sur $\mathbb{R}$.
Rappellons un théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle :
Si la série de fonctions $(\sum f_n)$ constituée de fonctions continues par morceaux, et intégrables sur I intervalle de $\mathbb{R}$, converge simplement vers sa somme totale S sur I, si S est continue par morceaux, si la série $\left(\sum \displaystyle\int_I |f_n|\right)$ est convergente, alors la fonction S est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$

Appliquons le aux fonctions : $f_n(x) = u_n\dfrac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}$

· elles sont continues sur $I = [0, \infty[$ et intégrables, d'ailleurs : $\displaystyle\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma\,(n+1) = n!$

· la somme totale est le produit de deux séries entières (avec II.2.), continues sur I

· et $\displaystyle\int_I |f_n| = \int_0^\infty |u_n|\,\frac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = |u_n|$ est justement le terme général d'une série convergente.

Donc S définie par $x \to \mathrm{e}^{-x}\,u(x)$ est intégrable sur I, ce qui assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est C-sommable,
et $S_C(u) = \displaystyle\int_0^\infty S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\left[\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\frac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x}\right]\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_0^\infty u_n\frac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est C-sommable, et $S_C(u) = U$

5. Pour $u_n = (-1)^n$, la série est grossièrement divergente, mais on a vu en I.1.b. qu'elle était C-sommable.

6. a. B est le produit de deux fonctions sommes de séries entières. Si la série $(\sum u_n)$ converge, la suite $(U_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée et la série entière $\left(\sum U_{n-1}\dfrac{x^n}{n!}\right)$ est de rayon infini (avec II.1.), de même que la série exponentielle,

B est donc définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

6. b. La série entière $\left(\sum U_{n-1}\dfrac{x^n}{n!}\right)$ est de rayon infini, sa somme totale $T(x)$ est nulle en $x = 0$, et se dérive terme à terme $T'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}U_{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = U(x)$, puisque T est C^1 sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'analyse assure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x U(t)\,\mathrm{d}t$$

Par dérivation : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad B'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[U(x) - \displaystyle\int_0^x U(t)\,\mathrm{d}t\right] = \mathrm{e}^{-x}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_n\dfrac{x^n}{n!} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}U_{n-1}\dfrac{x^n}{n!}\right]$

d'où $B'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(U_n - U_{n-1})\dfrac{x^n}{n!}\right] = \mathrm{e}^{-x}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n\dfrac{x^n}{n!}\right] = \mathrm{e}^{-x}\,u(x)$

$$\text{Ainsi } B(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}u_n\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,u(t)\,\mathrm{d}t \text{ puisque } B(0) = 0$$

6. c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors C-sommable si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}B(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.
Et $B(x) = \mathrm{e}^{-x}\,T(x)$ a la forme adéquate pour qu'on lui applique un résultat de B-sommabilité, en choisissant une suite telle que U_{n-1} soit son U_n. Ainsi, si on pose : $t_n = u_{n-1}$ et $t_0 = 0$, la somme $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n}t_k = U_{n-1}$

et $T(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n\dfrac{x^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$ est bien la fonction dont on parle ci-dessus. La série $(\sum t_n)$ est convergente de somme totale $T=U$ et avec II.3. $S_B(t)=U$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,T(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}B(x)=U$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors C-sommable et $S_C(u)=U$

7. La série entière $(\sum a_nx^n)$ est de rayon de convergence $R>0$, et de somme totale $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Ce qui nous permet de majorer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple en $x=\rho$, avec $0<\rho<R$, la série converge absolument, donc la suite tend vers 0 et est bornée : $\exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\,\rho^n\leqslant M$ donc $|a_n|\leqslant\dfrac{M}{\rho^n}$

Ainsi : $\forall x>0,\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \ |a_n|\,\dfrac{x^n}{n!}\leqslant\dfrac{M}{\rho^n}\dfrac{x^n}{n!}$ notons w_n le terme général de cette série majorante.

On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n>0$ et $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}=\dfrac{x}{\rho\,(n+1)}\to0$ quand $n\to\infty$ donc avec le critère de d'Alembert la série majorante $(\sum w_n)$ est convergente, et la série positive $\left(\sum|a_n|\,\dfrac{x^n}{n!}\right)$ est donc convergente pour tout $x>0$

La série entière $\left(\sum a_n\,\dfrac{x^n}{n!}\right)$ est donc de rayon $R=\infty$

8. La fonction somme totale est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$, $G(0)=a_0=f(0)$

On a, pour x fixé tel que $|x|<R$: $\quad f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\dfrac{x^n}{n!}\displaystyle\int_0^\infty t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^\infty a_n\frac{(xt)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Pour légitimer l'interversion des deux sommations, utilisons le même théorème qu'en II. 4. avec les fonctions $g_n(t)=a_n\dfrac{(xt)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}$ continues sur $I=[0,\infty[$, la somme totale est $\Phi(t)=\mathrm{e}^{-t}\,G(xt)$ continue sur I, et la série des intégrales $\left(\sum\displaystyle\int_I|g_n|\right)$ est convergente car $\displaystyle\int_I|g_n|=|a_n|\,|x|^n\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t=|a_n|\,|x|^n$ et $|x|<R$.

Donc la somme totale $t\to\mathrm{e}^{-t}\,G(xt)$ est intégrable sur I

et $\forall x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<R$ on a : $f(x)=\displaystyle\int_0^\infty\Phi\,(t)\;\mathrm{d}t=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t}\,G(xt)\;\mathrm{d}t$

Partie III

1. Avec le développement en série entière sur $\mathbb{R}$ de $\cos(x)$, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 1-\cos(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}=x^2\left[\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\,\frac{x^{2p}}{(2p+2)!}\right]\ \text{avec } p=k-1$$

Donc pour $x\neq0$: $H(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est la somme totale de la série numérique $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\,\dfrac{x^{2p}}{(2p+2)!}$ convergente (on a multiplié une série convergente par le scalaire $\lambda=\dfrac{1}{x^2}$)

On obtient une série entière de rayon $R=\infty$, l'égalité est aussi vraie en $x=0$ et $H(x)=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\,\dfrac{x^{2p}}{(2p+2)!}$

2. a. Selon que n est $\begin{cases}\text{pair : } n=2p & \text{alors}\quad n!\,a_n=\dfrac{(-1)^p}{(2p+2)\,(2p+1)}\\ \text{impair : } n=2p+1 & \quad\quad\ \ n!\,a_n=0\end{cases}$

et si on pose $z_p=\dfrac{x^{2p}}{(2p+2)\,(2p+1)}$ pour $x\in[-1,1]$ on a $z_p\leqslant\dfrac{1}{4p^2}$ la série $(\sum z_p)$ est convergente, et grossièrement divergente pour $|x|>1$.

La série entière $(\sum n!a_nx^n)$ a donc un rayon de convergence $R=1$.

2. b. De plus : $\dfrac{(-1)^p}{(2p+2)\,(2p+1)}=(-1)^p\left[\dfrac{1}{(2p+1)}-\dfrac{1}{(2p+2)}\right]$ et les séries restent de rayon $R=1$

On a, sur $]-1,1[$ l'égalité : $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p\,x^{2p}}{(2p+2)\,(2p+1)}=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p\,x^{2p}}{2p+1}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p\,(x^2)^p}{p+1}$

donc pour $x\neq0$: $h(x)=\dfrac{\operatorname{Arc}\tan(x)}{x}-\dfrac{\ln(1+x^2)}{2x^2}$ et $h(0)=a_0=\dfrac{1}{2}$

3. a. Nous sommes dans la situation étudiée au II. 8. avec $f(x)=h(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ où $b_n=n!\,a_n$ et $R=1$.

D'où le résultat : $\forall x\in\,]-1,1[\ \ h(x)=\displaystyle\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t}\,H(xt)\;\mathrm{d}t$

3. b. Pour $x>0$, le changement de variable affine : $(u=xt,\ t\in[0,\infty[) \iff \left(t=\dfrac{u}{x},\ u\in[0,\infty[\right)$ conserve l'intégrabilité et les intégrales sont égales. Ainsi $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,H(xt)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,H(u)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}u$

et $\forall x\in]0,1[\ \ xh(x)=\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,H(u)\,\mathrm{d}u$

4. La fonction H continue sur $[0,\infty[$ (c'est la somme d'une série entière) est majorée : $H(u)\leqslant\dfrac{2}{u^2}$ sur $]0,\infty[$, elle est donc intégrable sur $[0,\infty[$.

Considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0,\infty[$ tendant vers $+\infty$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des inverses : $y_n=\dfrac{1}{x_n}\to 0^+$ et la suite des fonctions $\psi_n(u)=\mathrm{e}^{-\frac{u}{x_n}}\,H(u)=\mathrm{e}^{-u\,y_n}\,H(u)$.

Ces fonctions sont continues sur $[0,\infty[$ et dominées par H (car $|\psi_n(u)|\leqslant|H(u)|$ sur $[0,\infty[$) qui est intégrable. La suite de fonctions converge simplement vers H sur $[0,\infty[$. Ces fonctions sont donc intégrables, et par le théorème de convergence sous domination, la limite des intégrale égale l'intégrale de la limite : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u\,y_n}\,H(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty H(u)\,\mathrm{d}u$

Par la caractérisation séquentielle de la limite : $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Psi(x)=\int_0^\infty H(u)\,\mathrm{d}u$

5. a. Soit ψ la fonction de deux variables : $\psi(x,u)=\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,H(u)$, elle est définie et C^∞ sur $]0,\infty[\times[0,\infty[$.

On a : $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,u)=\dfrac{u}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,H(u)$ et $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,u)=\left[\dfrac{-2\,u}{x^3}+\dfrac{u^2}{x^4}\right]\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,H(u)$

Pour $0<a<b$ fixés, plaçons nous pour $x\in[a,b]$ alors les dérivées sont dominées :

$$\forall(x,u)\in[a,b]\times[0,\infty[,\quad \begin{aligned}&\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,u)\right|\leqslant\omega_1(u)=\frac{1}{a^2}\,u\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{b}}\,H(u)\\ &\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,u)\right|\leqslant\omega_2(u)=\left[\frac{2\,u}{a^3}+\frac{u^2}{a^4}\right]\mathrm{e}^{-\frac{u}{b}}\,H(u)\end{aligned}$$

et ω_1 et ω_2 sont continues sur $[0,\infty[$ et majorées sur $]0,\infty[$:

$\omega_1(u)\leqslant\dfrac{2}{a^2u}\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{b}}$ et $\omega_2(u)\leqslant\left[\dfrac{4}{a^3u}+\dfrac{2}{a^4}\right]\mathrm{e}^{-\frac{u}{b}}$ elles sont donc intégrables

(l'exponentielle absorbera les puissances : $\dfrac{2}{a^2u}\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{b}}\leqslant\dfrac{1}{u^2}$ pour u assez grand, de même l'autre)

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sous domination :

Ψ est de classe C^2 sur tous les intervalles $[a,b]$ donc finalement sur $]0,\infty[$

De plus : $\Psi'(x)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{u}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,H(u)\,\mathrm{d}u$ et $\Psi''(x)=\displaystyle\int_0^\infty\left[\frac{-2\,u}{x^3}+\frac{u^2}{x^4}\right]\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,H(u)\,\mathrm{d}u$ sur $]0,\infty[$

ainsi $\quad x\Psi''(x)+2\,\Psi'(x)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{u^2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,H(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x^3}\int_0^\infty[1-\cos(u)]\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,\mathrm{d}u$

On peut calculer cette dernière intégrale : $\displaystyle\int_0^\infty[1-\cos(u)]\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty\left[1-\frac{\mathrm{e}^{i\,u}+\mathrm{e}^{-iu}}{2}\right]\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\mathrm{d}u$

et $\displaystyle\int_0^\infty\mathrm{e}^{\lambda u}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda)<0$

Donc $\displaystyle\int_0^\infty[1-\cos(u)]\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,\mathrm{d}u=x+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i-\frac{1}{x}}+\frac{1}{-i-\frac{1}{x}}\right]=x-\frac{x}{2}\left[\frac{1}{1-ix}+\frac{1}{1+ix}\right]=x-\frac{x}{1+x^2}$

Ainsi sur $]0,\infty[$ on a $\quad x\Psi''(x)+2\,\Psi'(x)=\dfrac{1}{x^3}\left[\dfrac{x^3}{1+x^2}\right]=\dfrac{1}{1+x^2}$ et $(]0,\infty[,\Psi)$ solution de (E)

5. b. (E) est linéaire du premier ordre en $z=y'$ et le théorème de Cauchy linéaire s'applique sur $I=]0,\infty[$, (l'équation est sous forme résolue, à coefficients C^∞) il assure l'existence d'un plan de solutions maximales C^∞ sur I.

Les solutions maximales de (e) : $z'=-\dfrac{2}{x}z$ constituent la droite dirigée par $\left(I,\dfrac{1}{x^2}\right)$ et par la méthode de Lagrange, une solution particulière de la forme $z(x)=\dfrac{k(x)}{x^2}$ vérifie $k'(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ d'où $k(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Les solutions de (E) vérifient donc : $\exists\lambda_1\in\mathbb{R},\ y'(x)=\dfrac{\lambda_1}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)$

Primitivons par parties, les fonctions étant C^1 sur le segment $[1,x]$, il existe $\lambda_2\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\int_1^x\frac{1}{2t^2}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{2t}\ln(1+t^2)\right]_{t=1}^{t=x}+\int_1^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{Arc}\tan(x)-\frac{1}{2x}\ln(1+x^2)+\lambda_2$$

Les solutions de (E) sont les couples (I, y) tels que :

$$\exists\,(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2,\;\; y(x) = \operatorname{Arc}\tan(x) - \frac{1}{2x}\ln(1+x^2) + \frac{c_1}{x} + c_2$$

5. c. Appliquant les questions précédentes :

Avec III. 4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} H(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{x\to\infty} \Psi\,(x)$

et avec III. 2. b. $\displaystyle\Psi\,(x) = x\,h(x) = x\left[\frac{\operatorname{Arc}\tan(x)}{x} - \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}\right] = \operatorname{Arc}\tan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$

ce qui est confirmé avec la question précédente III. 5. b.

On obtient : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$