
Centrale Supélec, TSI, 2011, Mathématiques 1.

Partie I

I A

- (a) I est un intervalle contenant \mathbb{R}_+ donc si $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $x + n \in I$.
(b) $f(x+1) - f(x) = g(x+1) - g(x)$ donc : $f(x) - g(x) = (-1)(f(x+1) - g(x+1))$. Par récurrence élémentaire : $f(x) - g(x) = (-1)^n(f(x+n) - g(x+n))$ C'est à dire :

$$f(x) = g(x) + (-1)^n(f(x+n) - g(x+n))$$

- Par passage à la limite $n \rightarrow \infty$, on obtient $f(x) = g(x)$.

I B

- La suite $(\varphi(x+k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. La série est $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \varphi(x+k)$ donc alternée, convergente par le théorème des séries alternées.
- On a

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \varphi(x+k)$$

- $f(x+1) + f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (-1)^{k-1} \varphi(x+k) + \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \varphi(x+k) = \varphi(x)$
- La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \varphi(x+k)$ étant alterné et de premier terme positif, sa somme $f(x)$ est comprise entre son premier terme et sa deuxième somme partielle. C'est à dire :

$$\varphi(x) - \varphi(x+1) \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

- Par le théorème des gendarmes, il s'en suit que $f(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$ et donc que f est bien une solution du problème (1) qui a finalement une et une seule solution.

Partie II

II A

- L'application θ est visiblement linéaire et associe à un polynôme réel un polynôme réel. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- Si $a_n X^n \neq 0$ est le terme dominant de P alors celui de $\theta(P)$ est $a_n (\frac{1}{e} + 1) X^n \neq 0$.
L'application θ préserve donc le degré.
- θ est injective car son noyau est réduit à $\{0\}$ d'après la question précédente.
- θ préservant le degré, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par θ et on a un endomorphisme induit θ_n .
- θ étant injectif et $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension finie, θ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il donc existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\theta_n(P) = \theta(P) = Q$$

7. Si $\varphi(x) = Q(x) \cdot \exp(-x)$, P vérifie : $\theta(P) = Q$ et $f(x) = P(x) \exp(-x)$ alors :

$$f(x+1) + f(x) = P(x+1) \exp(-x-1) + P(x) \exp(-x) \quad (1)$$

$$= \exp(-x) \left(\frac{P(x+1)}{e} + P(x) \right) \quad (2)$$

$$f(x+1) + f(x) = \exp(-x) \quad (3)$$

De plus, par croissance comparée :

$$f(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$$

f est donc l'unique solution du problème (1).

II B

P_n est tel que :

$$\frac{1}{e} P_n(X+1) + P_n(X) = X^n, \quad \theta(P_n) = X^n$$

1. (a) En dérivant la relation précédente, on a : $\theta(P'_n) = nX^{n-1} = \theta(nP_{n-1})$. Par injectivité de θ , on en déduit :

$$P'_n = nP_{n-1}$$

(b) Par récurrence élémentaire, on obtient alors :

$$P_n^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot P_{n-k}$$

2. Par la formule de Taylor entre X et $X+1$, P_n étant de degré n :

$$\begin{aligned} P_n(X+1) &= P_n(X) + P'_n(X) + \dots + \frac{P_n^{(k)}(X)}{k!} + \dots + \frac{P_n^{(n)}(X)}{n!} \\ &= P_n(X) + nP_{n-1}(X) + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} P_{n-k}(X) + \dots + P_0(X) \end{aligned}$$

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X)$$

3.

$$\begin{aligned} P_n(X) &= X^n - \frac{1}{e} P_n(X+1) \\ &= X^n - \frac{1}{e} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X) \right) \\ &= X^n - \frac{1}{e} P_n(X) - \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} \left(X^n - \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X) \right) \\ P_n(X) &= \frac{e}{e+1} X^n - \frac{1}{e+1} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X) \right) \end{aligned}$$

4. Si $n=0$ alors $P_n(x) = e/(e+1)$.

Sinon : $s := 0$.

Pour $k = 1..n$ faire : $s := s + \text{binomial}(n, k) * P_{n-k}$.

Retourner $P_n(x) = \frac{e}{e+1}x^n - \frac{1}{e+1}s$.

Partie III

On a $I =]-1, +\infty[$ et $\varphi(x) = \frac{1}{1+x}$.

III A

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x \cdot dt}{1+t}$$

1. Si $x \in I$ alors : $\frac{t^x}{1+t} \sim t^x$ pour $t \rightarrow 0$ et $\int_0^1 t^x dt$ est absolument convergente si $x > -1$. D'autre part, $\frac{t^x}{1+t}$ est définie et continue sur $]0, 1]$. f est donc bien définie sur I .

2. Si $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+1) &= \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{t+1} dt \\ &= \int_0^1 t^x dt \\ f(x) + f(x+1) &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

3. Si $x \in I$ et $0 < t < 1$, alors $0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x$ donc par intégration :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$$

C'est à dire :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$$

4. La fonction φ est décroissante sur I et tend vers 0 en $+\infty$. D'après ce qui précède, f tend vers 0 en $+\infty$ et vérifie la première condition demandée.

f est donc l'unique solution du problème (1).

III B

1. Par application de la partie I.B.2), on a :

$$(\forall x \in I) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

2. Pour $x = 0$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

3. De même pour $x = n$, la formule du I.B.2), par un changement d'indice, donne :

$$f(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - n - 1}{k}$$

4. Si $x \in I$ et $N \in \mathbb{N}$.

(a) La série étant alternée, l'écart entre la somme et la somme partielle d'ordre n est inférieure au n -ième terme de la série. Autrement dit dans notre cas :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{x+k+1} \right| \leq \frac{1}{x+N+2}$$

(b) $N := \text{Ent}(\frac{1}{\epsilon} - x - 2) + 1$ (Ent : partie entière), $s := 0$.

$$\text{Pour } k = 0..N \text{ faire } s := s + \frac{(-1)^k}{x+k+1}.$$

Retourner s .

On trouve $f(1.5) \simeq 0.2$.

5. Si $x' > x$, x et x' étant dans I alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{x+k+1} - \frac{1}{x'+k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x' - x}{(x+k+1)(x'+k+1)} \\ &= (x' - x) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x'+k+1)} \end{aligned}$$

La suite de terme général $\left(\frac{1}{(x+k+1)(x'+k+1)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et tendant vers 0, la série de terme général $\left(\frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x'+k+1)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est alternée de premier terme positif donc sa somme est positive. Par suite, $f(x) - f(x')$ est négatif. Autrement dit, la fonction f est décroissante sur I .

6. D'après la question précédente, si $x > 0$, donc $x - 1 \in I$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + f(x+1)}{2} &\leq f(x) \leq \frac{f(x-1) + f(x)}{2} \\ \frac{\varphi(x)}{2} &\leq f(x) \leq \frac{\varphi(x-1)}{2} \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\frac{1}{2(x+1)} \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$$

7. On a $\frac{1}{2(x+1)} \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x}$.

L'inégalité précédente et le théorème des gendarmes donne donc :

$$f(x) \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x}$$

On a ainsi : $f(n) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n}$. C'est à dire : $(-1)^{n+1} \frac{(-1)^k}{k} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n}$ et donc :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

8. La suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. La série de terme général $((-1)^{n+1} f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une série alternée et donc convergente. Autrement dit, la série de terme général $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

III C

1. On a $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}$ pour $x \in I$.

La fonction $(x, t) \rightarrow \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur $] -1, +\infty[\times]0, 1]$. Si $K = [a, b]$ avec $-1 < a < b < \infty$ et $(x, t) \in [a, b] \times]0, 1]$ alors : $0 < \frac{t^x}{1+t} < t^a$ et $\int_0^1 t^a dt$ est une intégrale (absolument) convergente. Le théorème de continuité donne alors la continuité de f sur K .

Par extension, f est continue sur I .

2. On a : si $x \in I$ alors $f(x) = \varphi(x) - f(x+1)$.

D'après la question précédente : $f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} f(0) = \ln(2)$. De plus : $\varphi(x) = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty$.

Il s'en suit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty$ et $f(x) \sim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1}$.

3. (a) Si $x \in I$ et $k \in \mathbb{N}$ alors la fonction $t \rightarrow t^x (\ln(t))^k$ est continue sur $]0, 1]$.

De plus, si $-1 < x' < x$ et $x' < 0$ alors $t^{x'} (\ln(t))^k = O_{x \rightarrow 0}(t^{x'})$. L'intégrale $\int_0^1 t^{x'} dt$ est absolument convergente. Du coup, $\int_0^1 t^x (\ln(t))^k dt$ est (absolument) convergente.

(b) Par intégration par parties, si $0 < a < 1$:

$$\begin{aligned} \int_a^1 t^x (\ln(t))^k dt &= \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} (\ln(t))^k \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t^{x+1}}{x+1} \cdot \frac{k (\ln(t))^{k-1}}{t} \\ \int_a^1 t^x (\ln(t))^k dt &= \left(\frac{a^{x+1}}{x+1} (\ln(a))^k \right) - \int_a^1 \frac{t^{x+1}}{x+1} \cdot \frac{k (\ln(t))^{k-1}}{t} \end{aligned}$$

En faisant tendre a vers 0, on obtient :

$$\int_0^1 t^x (\ln(t))^k dt = - \int_0^1 \frac{t^x}{x+1} \cdot k (\ln(t))^{k-1} dt$$

Autrement dit :

$$I_k(x) = - \frac{k}{x+1} I_{k-1}(x)$$

Par récurrence élémentaire, on obtient : $I_k(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^k} I_0(x)$. Or $I_0(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$. Donc :

$$I_k(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$$

4. Si $x \in I$ et $k \in \mathbb{N}$ alors $t \rightarrow \frac{(\ln(x))^k}{1+t} t^x$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, si on choisit $x > x' > -1$, alors :

$$\varphi_k(t, x) = \frac{(\ln(x))^k}{1+t} t^x \sim_{t \rightarrow 0} (\ln(x))^k \cdot t^x = o_{t \rightarrow 0}(t^{x'})$$

et $t \rightarrow t^{x'}$ est absolument intégrable sur $]0, 1]$.

Donc $t \rightarrow \frac{(\ln(x))^k}{1+t} t^x$ est absolument intégrable sur $]0, 1]$.

5. Fixons $x' > -1$, et $k \in \mathbb{N}$.

Si $-1 < x' \leq x$, alors on a : $\frac{\partial^{(k)}}{\partial x^k} \varphi(x, t) = \varphi_k(t, x)$ et $|\varphi_k(t, x)| \leq |\varphi_k(t, x')|$.

La fonction $t \rightarrow \varphi_k(t, x')$ est absolument convergente sur $]0, 1]$ donc on a l'hypothèse de domination sur l'intervalle $[x', \infty[$. f est donc C^k sur $[x', \infty[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x' > -1$.

Finalement f est C^∞ sur I et :

$$f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x dt$$

6. (a) On fixe $k \in \mathbb{N}$.

On a

$$f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x dt$$

Si $x > 0$, et $0 < t < 1$:

$$\left| \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x \right| \leq \left| \frac{(\ln t)^k}{1+t} \right|$$

Or $\int_0^1 \left| \frac{(\ln t)^k}{1+t} \right| dt$ est convergente. On a donc l'hypothèse de domination pour $x \geq 0$.

Or si $0 < t < 1$, alors $\frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = 0$$

(b) Fixons $k \in \mathbb{N}$ et $x > 1$.

On a : $f^{(k)}(x+1) + f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$ (récurrence élémentaire) et $f^{(k)}(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$. De plus la fonction $x \rightarrow \frac{1}{(x+1)^{k+1}}$ est décroissante. On est donc (au signe près) dans les conditions du problème (1). Par unicité de la solution et d'après la partie I :

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \varphi^{(k)}(x+j) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{(-1)^k k!}{(x+j+1)^{k+1}} \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^k k! \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+j+1)^{k+1}} \end{aligned}$$

7. (a) La fonction h est 2π -périodique, C^1 par morceaux et est donc développable en séries de Fourier.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, h étant paire : $b_n = 0$ et :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} \\ a_0 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[t \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

Autrement dit, $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_{2k+1} = -\frac{2}{(2k+1)^2\pi}$ et $a_{2k+2} = 0$ si $k \in \mathbb{N}$.

(b) On a $h(0) = 0$ et h est continue en 0 donc égale à sa série de Fourier en 0. Autrement dit :

$$h(0) = 0 = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos((2k+1)0) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2\pi}$$

Finalement :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(c) Par application des formules obtenues, en séparant la somme des termes d'ordres pairs et impairs:

$$\begin{aligned} f'(0) &= (-1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Finalement :

$$f'(0) = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$$

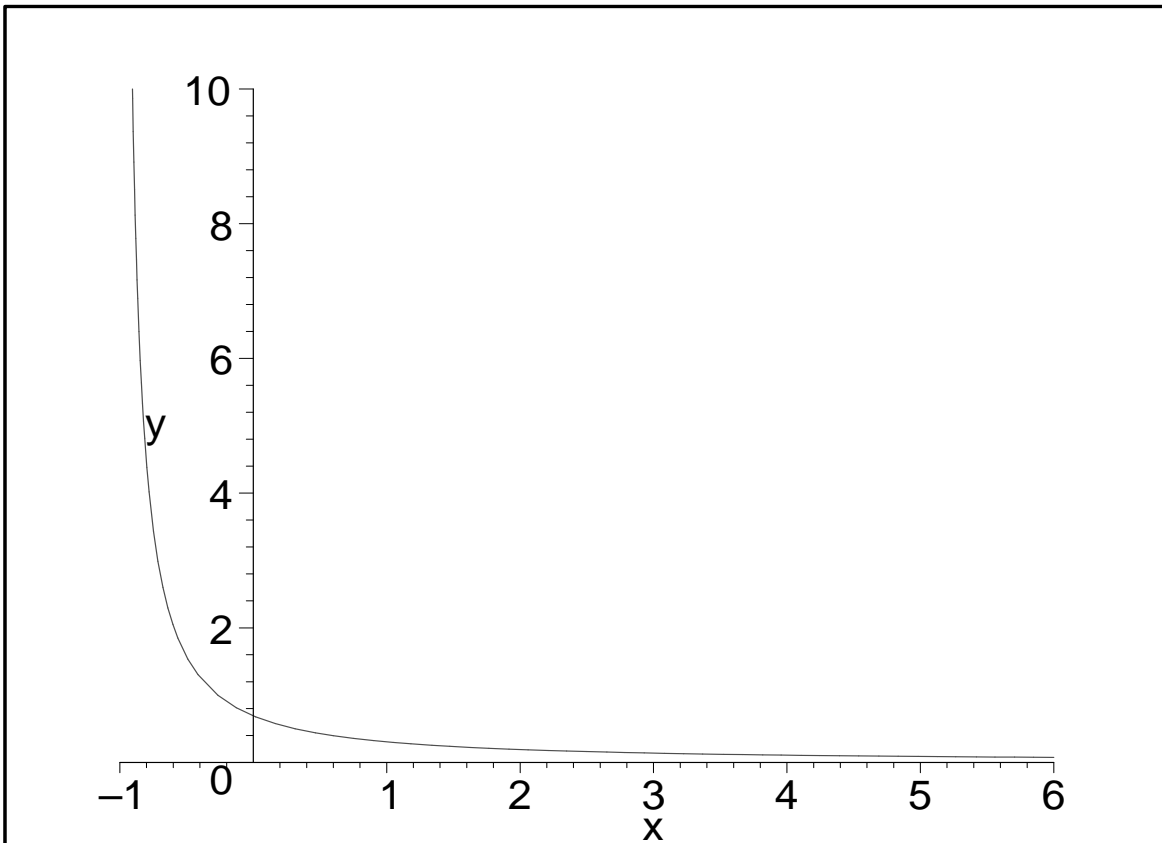
8. On a $f(0) = \ln(2)$ et $f'(0) = -\frac{\pi^2}{12}$. L'équation de la tangente à l'origine est donc $y = \ln(2) - x\frac{\pi^2}{12}$. f est continue et décroissante, tend vers 0 en $+\infty$.

De plus, $f(x) = \frac{1}{x+1} - f(x) \sim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1}$ et donc f tend vers $+\infty$ en -1 .

> `f:=x->int(t^x/(1+t),t=0..1);`

$$f := x \rightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

> `plot(f(x),x=-1..6,y=0..10);`



9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On vu que (au signe près) $f^{(n)}(x)$ est la solution du problème (1) pour $\varphi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(x+1)^{n+1}}$ sur I . D'après la partie I, on en déduit :

$$|\varphi^{(n)}(0) - \varphi^{(n)}(1)| \leq |f^{(n)}(0)| \leq |\varphi^{(n)}(0)|$$

C'est à dire :

$$n! - \frac{n!}{2^{n+1}} \leq f^{(n)}(0) \leq n!$$

On en déduit :

$$\frac{n!}{2} \leq f^{(n)}(0) \leq n!.$$

10. Si $0 < x < 1$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq x^n$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ converge.

D'autre part, si $x > 1$ alors : $\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \geq \frac{x^n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Le rayon cherché est donc égal à 1.