CONCOURS X-ENS
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES A (XLSR)
Session 2024 - Filières MP - MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

Le problème à pour sujet les théorèmes de Mertens et de Hardy et Ramanujan

Première partie

1 ▷

(1a) • Les matrices M_x sont symétriques réelles donc elles sont diagonalisables , en particulier M_0 et $-M_0$ sont diagonalisables.

• Remarquons que $I_n + M_0$ est de rang 1 donc 1 est valeur propre de $-M_0$ d'ordre supérieur ou égal à $n-1$, par suite $-M_0$ admet au plus une autre valeur propre λ , et on sait que $\mathrm{tr}(-M_0) = (n-1)\times 1 + \lambda = 0$ ainsi $\lambda = 1-n$ et 1 est valeur propre de $-M_0$ d'ordre égal à $n-1$.

Finalement $Sp(-M_0) = \{1, 1-n\}$.

• $E_1(-M_0)$ est l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 + ... + x_n = 0$ et $E_{1-n}(-M_0) = E_1(-M_0)^\perp = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

(1b) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $M_x = (a_{i\ j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le i\le n}}$. Le polynôme caractéristique de $-M_0$ est donné par

$$\chi_{-M_0}(x) = \det(M_x) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$$

par définition du déterminant on a

$$\chi_{-M_0}(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\ \sigma(i)}$$

remarquons que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i\ \sigma(i)} = \prod_{\substack{i=1\\ \sigma(i)=i}}^{n} a_{i\ \sigma(i)} \prod_{\substack{i=1\\ \sigma(i)\neq i}}^{n} a_{i\ \sigma(i)} = x^{\nu(\sigma)}$$

d'où

$$\chi_{-M_0}(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

2 ▷

• Pour $x = 1$ on obtient $\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = 0}$.

• Par dérivation on a

$$\frac{d\chi_{-M_0}}{dx}(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) x^{\nu(\sigma)-1} = n(x-1)^{n-2}(x+n-2).$$

Pour $x = 1$ on obtient $\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } n\ge 3 \\ 2 \text{ si } n = 2 \end{cases}}$.

• On a par intégration

$$\begin{aligned} \int_0^1 \chi_{-M_0}(x)dx &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1} \\ &= \int_0^1 (x-1)^n + n(x-1)^{n-1} dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} + (x-1)^n\right]_0^1 \end{aligned}$$

[1] https://tinyurl.com/2qyzzrbd

ainsi $\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1} = (-1)^{n+1}\ \frac{n}{n+1}}$.

3 ▷ D'après 2 on a $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = 0$, et on a

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \varepsilon(\sigma)=1}} \varepsilon(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \varepsilon(\sigma)=-1}} \varepsilon(\sigma)\\ &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \varepsilon(\sigma)=1}} 1 - \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \varepsilon(\sigma)=-1}} 1\\ &= \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} - \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} = \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}$$

Posons $A = \{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=1\}$, on a $\mathfrak{S}_n = A\cup\overline{A}$ et $\mathrm{Card}\,A = \mathrm{Card}\,\overline{A} = \frac{n!}{2}$, ainsi la probabilité qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ tirée uniformément au hasard soit dans A (ou dans $\overline{A}$) est $\frac{1}{2}$.

4 ▷ Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on a évidement $\sigma\in D_n$ si et seulement si $\nu(\sigma)=0$, on a . Dans la question 1b on a

$$\chi_{-M_0}(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

le coefficient constant est donné par

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{D}_n} \varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-1}(n-1)$$

et on a

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{D}_n} \varepsilon(\sigma) = \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} - \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}$$

d'où

$$\mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} = \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\} + (-1)^{n-1}(n-1).$$

5 ▷ Soit $m\in\mathbb{N}$. On considère la matrice $M = (a_{i\ j})_{\substack{1\le i\le m+1\\ 1\le j\le m+1}}$ avec $a_{i\ j} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & \text{si } j\le i\\ 0 & \text{si } i<j\end{cases}$

(5a) Les familles $(1, X, \ldots, X^m)$ et $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$ sont de degrés strictement croissants , donc elles sont libres dans $\mathbb{R}_m[X]$, de plus elles ont $m+1$ éléments , donc elles forment deux bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

(5b) Soit $j\in[\![1, m]\!]$ on a

$$\begin{aligned} X^j &= (X-1+1)^j\\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}(X-1)^i\end{aligned}$$

donc la j ieme colonne de la matrice, N, de l'application linéaire identité dans les bases $(1, X, \ldots, X^m)$ au départ et $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$ à l'arrivée est

$$\begin{pmatrix} \binom{j}{0}\\ \vdots\\ \binom{j}{j}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

qui est la transposée de la j ieme ligne de la matrice M , d'où $N = {}^tM$.

(5c) N est inversible car elle est la matrice de l'application identité qui est bijective et N^{-1} est la matrice de l'application linéaire identité dans les bases $(1,(X-1),\ldots,(X-1)^m)$ au départ et $(1,X,\ldots,X^m)$ à l'arrivée , comme $N = {}^tM$ donc M est inversible .

De la relation

$$(X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i (-1)^{j-i}$$

on a la j ieme colonne de la matrice N^{-1} est

$$\begin{pmatrix} (-1)^j \binom{j}{0} \\ \vdots \\ (-1)^0 \binom{j}{j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ (-1)^i \binom{i}{0} & (-1)^{i-1} \binom{i}{1} & \cdots & \binom{i}{i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ (-1)^m \binom{m}{0} & (-1)^{m-1} \binom{m}{1} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{M^{-1} = (b_{i\ j})_{\substack{1\leq i\leq m+1 \\ 1\leq j\leq m+1}} \text{ avec } b_{i\ j} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1} \text{ si } j \leq i \\ 0 \quad \text{si } i < j \end{cases}}$

(5d) Soit $(u_0,\ldots,u_m),(v_0,\ldots,v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, posons $U = {}^t(u_0,\ldots,u_m)$ et $V = {}^t(v_0,\ldots,v_m)$

$$\text{si } \forall k \leqslant m, \quad u_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} v_\ell$$

qui s'exprime par $U = MV$ donc $V = M^{-1}U$ par suite on a

$$\forall k \leqslant m, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell.$$

appelée **Formule d'inversion de Pascal** .

6 ▷ Écrivons $\mathfrak{S}_n = \bigcup\limits_{0\leq k\leq n} \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \ \nu(\sigma) = k\}$, c'est une réunion disjointe donc

$$n! = \operatorname{Card} \mathfrak{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card} \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \ \nu(\sigma) = k\}$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, posons P_k l'ensemble des parties à k élément de $[\![1,n]\!]$, on établie une bijection par :

$$\begin{array}{ccc} \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \ \nu(\sigma) = k\} & \rightarrow & \mathcal{P}_k \times \mathfrak{D}_{n-k} \\ \sigma & \mapsto & (F(\sigma), \sigma') \end{array}$$

avec $F(\sigma) = \{i \in [\![1,n]\!] \ : \ \sigma(i) = i\}$ et σ' la restriction de σ sur $\overline{F(\sigma)}$ le complémentaire de $F(\sigma)$ dans $[\![1,n]\!]$ (support de σ) .

On en déduit

$$\operatorname{Card} \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \ \nu(\sigma) = k\} = \binom{n}{k} D_{n-k}$$

Ce qui revient à dire : pour déranger $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments, il faut choisir les $n-k$ éléments devant être dérangés, soit $\binom{n}{k}$ possibilités, puis effectivement déranger ces $n-k$ éléments, soit D_{n-k} possibilités. Il y a donc $\binom{n}{k}D_{n-k}$ façons de déranger $n-k$ éléments dans un ensemble de n éléments.
On a donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$$

la formule d'inversion de Pascal donne

$$D_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Ainsi pour tout entier naturel n non nul , $\boxed{D_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.}$

7 ▷

(7a) On a $Y_n(\mathfrak{D}_n) = \{-1,1\}$ et $\mathbb{P}(Y_n=1) = \dfrac{\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\}}{D_n}$, or on a

$$D_n = \operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} + \operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}$$

et d'après 4

$$\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} = \operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\} + (-1)^{n-1}(n-1).$$

donc

$$\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} = \frac{D_n+(-1)^{n-1}(n-1)}{2}$$

par suite $\boxed{\mathbb{P}(Y_n=1) = \frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n}}$ et $\mathbb{P}(Y_n=-1) = 1-\mathbb{P}(Y_n=1)$.

(7b) On a $D_n = n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ donc $D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}n!$ et $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, d'où pour tout $\varepsilon\in\{-1,1\}$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Y_n=\varepsilon) = \frac{1}{2}}$.

8 ▷

(8a) On a $Z_n(\mathfrak{S}_n) = [\![0,n]\!]$, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ on a $\mathbb{P}(Z_n=k) = \dfrac{\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \nu(\sigma)=k\}}{n!}$.

D'après la question 6 on a $\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\ :\ \nu(\sigma)=k\} = \binom{n}{k}D_{n-k}$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n=k) = \frac{\binom{n}{k}D_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}}$$

(8b) Pour tout entier naturel $k\leqslant n$ (fixé et ne dépend pas de n) on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Z_n=k) = \frac{e^{-1}}{k!}}$.

Z_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre 1.

(8c) Le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire est égale à l'espérance de Z_n, on a

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(Z_n=k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

simplifions cette somme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{k!}\sum_{i=0}^{n-k-1}\frac{(-1)^i}{i!}+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{k!}\sum_{i=0}^{n-k-1}\frac{(-1)^i}{i!}+\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\end{aligned}$$

on a $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}(-1)^{n-k-} = n(x-1)^{n-1}$ donc $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^{n-k} = 0$, ainsi $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_{n-1})$, et on a $\mathbb{E}(Z_2) = 1$ d'où $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 1}$

Le calcul de l'espérance de Z_n se fait aisément en remarquant que Z_n est la somme des variables aléatoires de Bernoulli $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$, où $X_k(\sigma)$ prend la valeur 1 si k est un point fixe de σ et 0 sinon . On a $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{n}$ d'où $\mathbb{E}(Z_n) = 1$.

9 ▷

- $n = 2$, dans S_2 on a l'identité ($(1)(2)$: 2 *cycles*) et une transposition ((12) : 1 *cycle*) .

Ce qui donne pour $n = 2$, $\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma) = \frac{3}{2}}$.

- $n = 3$, dans S_3 on a l'identité ($(1)(2)(3)$: 3 *cycles*) ,trois transpositions ($(a)(bc)$: 3×2 *cycles*) et deux 3-cycles ((abc) : 2×1 *cycles*) .

Ce qui donne pour $n = 3$, $\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma) = \frac{11}{6}}$.

- $n = 4$, dans S_4 on a l'identité ($(1)(2)(3)(4)$: 4 *cycles*) , six transpositions ($(a)(b)(cd)$: 6×3 *cycles*), huit de 3-cycles ($(a)(bcd)$: 8×2 *cycles*), trois produit de deux transpositions disjointes ($(ab)(cd)$: 3×2 *cycles*) et six 4-cycles $(abcd)$: 6×1 *cycles*).

Ce qui donne pour $n = 4$, $\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma) = \frac{50}{24}}$.

10 ▷

- L'identité est l'unique permutation qui se décompose en produit de n cycles à supports disjoints , donc $\boxed{s(n,n) = 1}$.
- $s(n,1)$ est le nombre des $n-$cycles de $\mathfrak{S}_n$, un $n-$cycle de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit $(n, a_1, ..., a_{n-1})$ avec

$a_1, ..., a_{n-1} \in [\![1,n]\!]$ et $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$ est une permutation de $\mathfrak{S}_{n-1}$, ce qui établit une bijection entre l'ensemble des $n-$cycles de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{S}_{n-1}$, par suite $\boxed{s(n,1) = (n-1)!}$.

- pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, posons $E(n,k)$ l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui se décompose en produit de k cycles à supports disjoints.

Écrivons $E(n,k) = A(n,k) \cup B(n,k)$ avec $A(n,k) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \sigma(1) = 1\ \}$ et $B(n,k) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \sigma(1) \neq 1\ \}$.
Soit $\sigma \in E(n,k)$, $\sigma = c_1c_2...c_k$, on a deux cas :
► Si $\sigma \in A(n,k)$ alors 1 est un point fixe (on suppose $c_1 = (1)$) donc la restriction de σ à $[\![2,n]\!]$ est une permutations de $\mathfrak{S}_{n-1}$ qui se décompose en produit de $k-1$ cycles à supports disjoints, on etablit ainsi une bijection entre $A(n,k)$ et $E(n-1,k-1)$ donc $\operatorname{Card} A(n,k) = s(n-1,k-1)$.
► Si $\sigma \in B(n,k)$ posons $\sigma(1) = j \neq 1$, 1 et j sont dans un des cycles c_i posons $c_1 = (1, j, \sigma(j), , ..., \sigma^p(j))$ (il correspond à l'orbite de 1) .
On a $(1,j)c_1 = (j, \sigma(j), , ..., \sigma^p(j))$ donc $(1,j)\sigma \in E(n-1,k)$, ainsi l'application qui a σ associe le couple $(\sigma(1), (1,\sigma(1))\circ\sigma)$ est une bijection de $B(n,k)$ vers $[\![2,n]\!] \times E(n-1,k)$ ce qui donne $\operatorname{Card} B(n,k) = (n-1)s(n-1,k)$, d'où la relation $\boxed{s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k).(1)}$

11 ▷ Posons $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$, la relation de récurrence (1) donne

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= x^n + (n-1)!x + \sum_{k=2}^{n-1} s(n-1,k-1)x^k + (n-1)\sum_{k=2}^{n-1} s(n-1,k)x^k \\
&= x^n + (n-1)!x + \sum_{k=1}^{n-2} s(n-1,k)x^{k+1} + (n-1)(P_{n-1}(x) - (n-2)!x) \\
&= x^n + (n-1)!x + x(P_{n-1}(x) - x^{n-1}) + (n-1)(P_{n-1}(x) - (n-2)!x) \\
&= (x+n-1)(P_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Donc $P_n(x) = (x+n-1)...(x+2)P_2(x)$, avec $P_2(x) = x^2 + x$, d'où
$\boxed{\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k}.$

Les $s(n,k)$ sont appelés **les nombres de Stirling de première espèce « non signés »** .

12 ▷ On a $X_n(\mathfrak{S}_n) = [\![1,n]\!]$ et $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{s(n,k)}{n!}$, donc $\mathbb{E}[X_n] = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ks(n,k)$.

D'après la question 11 on a :

$$\sum_{k=1}^{n} ks(n,k)x^{k-1} = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i).\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x+i} \quad (2)$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ks(n,k) = n!\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ et $\mathbb{E}[X_n] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ d'où $\boxed{\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).}$

13 ▷

(13a) On dérive la relation (1) :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k)x^{k-2} = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i).\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x+i}\right)^2 - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(x+i)^2}\right)$$

pour $x = 1$ on obtient

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

(13b) On a

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k^2 s(n,k) - \mathbb{E}[X_n]$$

ce qui donne

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k^2 s(n,k) = \mathbb{E}[X_n] + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right).$$

14 ▷

(14a) Écrivons

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \omega(\sigma)=k}}\omega(\sigma)^2 \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k^2\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \omega(\sigma)=k}}1 \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k^2 s(n,k)\end{aligned}$$

par suite

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 = \mathbb{E}[X_n] + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right).$$

et on a

- $\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)^2 + 2\gamma\ln(n) + \gamma^2 + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
- $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}$ avec $\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{i^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

ce qui donne $\boxed{\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)^2 + (2\gamma+1)\ln(n) + \left(\gamma + \gamma^2 - \frac{\pi^2}{6}\right) + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$

(14b) On a

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2-2\frac{\ln(n)}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)+\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\ln(n)^2$$

et

- $\frac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)^2+(2\gamma+1)\ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
- $\frac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)=\mathbb{E}\left[X_n\right]\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\frac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\ln(n)^2=\ln(n)^2$

ce qui donne

$$\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$$

15 ▷ Soit $\varepsilon>0$, remarquons que $\mathbb{P}\left(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)\right)=\mathbb{P}\left((X_n-\ln(n))^2>\varepsilon^2\ln(n)^2\right)$, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}\left(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)\right)\leqslant\frac{\mathbb{E}\left((X_n-\ln(n))^2\right)}{\varepsilon^2\ln(n)^2}.$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X_n-\ln(n))^2\right)&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_n=k)\left(k-\ln(n)\right)^2.\\&=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\left(k-\ln(n)\right)^2.s(n,k)\\&=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\\omega(\sigma)=k}}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2\\&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}\left((X_n-\ln(n))^2\right)\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, il existe donc un $n_0\geq 2$ tel que $\mathbb{E}\left((X_n-\ln(n))^2\right)\leq 2\ln(n)$ pour tout $n\geq n_0$, posons $C=\max(\{2\}\cup\left\{\frac{\mathbb{E}\left((X_i-\ln(i))^2\right)}{\ln(i)},i\in\ [\![2,n]\!]\right\}$, alors pour tout entier $n\geqslant 1$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)\right)\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2\ln(n)}.}$$

le cas $n=1$ est trivial.

Deuxième partie

16 ▷ Soit $(a_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de nombres réels. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $A(t)=\sum\limits_{2\leqslant k\leqslant t}a_k$. Soit $b:[2,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout $n\geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}a_kb(k)&=a_2b(2)+\sum_{k=3}^{n}\left(A(k)-A(k-1)\right)b(k)\\&=a_2b(2)+\sum_{k=3}^{n}A(k)b(k)-\sum_{k=2}^{n-1}A(k)b(k+1)\\&=A(n)b(n)+\sum_{k=2}^{n-1}A(k)\left(b(k)-b(k+1)\right)\quad(\ A(2)b(2)=a_2b(2)\ )\end{aligned}$$

remarquons que

$$A(k)\left(b(k+1)-b(k)\right)=A(k)\int_k^{k+1}b'(t)dt=\int_k^{k+1}A(t)b'(t)dt$$

la relation de Chasles donne

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n}a_kb(k)=A(n)b(n)-\int_2^n b'(t)A(t)dt.}$$

Il s'agit d'une généralisation de l'intégration par parties, appelée **formule sommatoire d'Abel** .

17 ▷

(17a) On a $\displaystyle\prod_{\substack{p\leq 1\\ p \text{ premier}}} p=1\ \leq 4,\quad \prod_{\substack{p\leq 2\\ p \text{ premier}}} p=2\leq 4^2\ ,\quad \prod_{\substack{p\leq 3\\ p \text{ premier}}} p=6\leq 4^3.$

On suppose à présent $n\geqslant 4$ et le résultat connu au rang k pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$.

(17b) Si n est pair alors $\displaystyle\prod_{\substack{p\leq n\\ p \text{ premier}}} p=\prod_{\substack{p\leq n-1\\ p \text{ premier}}} p\leqslant 4^{n-1}\leqslant 4^n.$

(17c)

- Soit $n=2m+1$ avec $m\in\mathbb{N}$. Pour tout $p\in[\![m+2,2m+1]\!]$, p divise $(2m+1)!=m!(m+1)!\dbinom{2m+1}{m}$

et il est premier avec $m!(m+1)!$ donc il divise $\dbinom{2m+1}{m}$ par suite $\displaystyle\prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1\\ p \text{ premier}}} p$ divise $\dbinom{2m+1}{m}$.

- On a $\dbinom{2m+1}{m}+\dbinom{2m+1}{m+1}\leqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{2m+1}\dbinom{2m+1}{m}=2^{2m+1}$ comme $\dbinom{2m+1}{m}=\dbinom{2m+1}{m+1}$ alors

$\dbinom{2m+1}{m}\leqslant 4^m.$

(17d) Pour $n\geqslant 2$ posons $\mathcal{P}(n)=$‹‹ $\displaystyle\prod_{\substack{p\leq k\\ p \text{ premier}}} p\leqslant 4^k$ pour $2\leqslant k\leqslant n$ ››.

$\mathcal{P}(2)$ est vrai et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai , il résulte de ce qui précède que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai .

Ainsi pour tout $n\geqslant 2$ $\boxed{\displaystyle\prod_{\substack{p\leq n\\ p \text{ premier}}} p\leqslant 4^n}$.

18 ▷ • Pour k suffisamment grand $E\left(\dfrac{n}{p^k}\right)=0$, la somme évoquée existe car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

On a $n!=1\times 2\times\ldots\times n$, parmi les entiers allant de 1 à n, il y en a exactement $E\left(\frac{n}{p}\right)$ divisibles par p, $E\left(\frac{n}{p^2}\right)$ divisibles par p^2, etc...donc

$$v_p(n!)=\sum_{k=1}^{+\infty}E\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

- On a $\dfrac{n}{p^k}-1<E\left(\dfrac{n}{p^k}\right)\leq\dfrac{n}{p^k}$ donc

$$\frac{n}{p}-1<E\left(\frac{n}{p}\right)\leq\nu_p(n!)\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n}{p^k}=\frac{n}{p-1}.$$

de plus $\dfrac{n}{p}+\frac{n}{p(p-1)}=\frac{n}{p-1}$ d'où $\boxed{\dfrac{n}{p}-1<\nu_p(n!)\leqslant\dfrac{n}{p}+\dfrac{n}{p(p-1)}.}$

19 ▷

(19a) Soit $k\geq 2$, on a $\ln(k)\leq\displaystyle\int_k^{k+1}\ln(t)dt\leq\ln(k+1)$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\ln(t)dt\leq\ln(k)\leq\int_k^{k+1}\ln(t)dt$, donc

$$\int_1^n\ln(t)dt\leq\sum_{k=2}^{n}\ln(k)\leq\int_1^{n+1}\ln(t)dt$$

soit

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \int_1^n \ln(t)dt \leq \int_n^{n+1} \ln(t)dt \leq \ln(n+1)$$

et on a $\displaystyle\int_1^n \ln(t)dt = n\ln(n) - n$ ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + O(\ln(n)) \quad (1).}$

(19b)

- Soit $p \leq n$, on a $\nu_p(n!) = \max\{\nu \in \mathbb{N} : p^\nu \mid n!\}$ donc $p^{\nu_p(n!)} \mid n!$ et $p^{\nu_p(n!)+1} \nmid n!$, ce qui donne $\displaystyle\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)} \mid n!$.

Réciproquement si $n! = \displaystyle\prod_{q \text{ premier}} q^{m_q}$, la décomposition de $n!$ en produit de nombres premiers , alors les $q \leq n$ et $m_q \leq \nu_q(n!)$ par suite $n! \mid \displaystyle\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$, ainsi $\boxed{n! = \displaystyle\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}}$.

- On a $\ln(n!) = \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \nu_p(n!)\ln(p)$, l'inégalité de la question 18 donne

$$n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \ln(p) < \ln(n!) \leqslant n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}.$$

et $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \ln(p) = \ln\left(\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} p\right)$, d'après la question 17 on a $\displaystyle\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n$
donc $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \ln(p) \leqslant 4\ln(n)$, ainsi

$$\boxed{n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - 4\ln(n) < \ln(n!) \leqslant n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}. \quad (2)}$$

(19c) On a $\dfrac{\ln(k)}{k(k-1)} = o\left(\dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ converge.

(19d) La relation (2) donne

$$\frac{\ln(n!)}{n} - \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} < \frac{\ln(n!) + 4\ln(n)}{n}$$

d'après la relation (1) de la question 19a on a

$$\frac{\ln(n!)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - 1 + O(\frac{\ln(n)}{n})$$

de plus $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \tfrac{\ln(p)}{p(p-1)} \leq \sum_{k\leq n} \tfrac{\ln(k)}{k(k-1)}$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \tfrac{\ln(k)}{k(k-1)}$ converge donc $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \tfrac{\ln(p)}{p(p-1)}$ est bornée par suite

$$\frac{\ln(n!)}{n} - \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1) \text{ et } \frac{\ln(n!) + 4\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1)$$

d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1).}$

Ce résultat est le premier théorème de Mertens démontré en 1874 .

20 ▷

(20a) Posons pour $n \geq 2$, $S(n) = \sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \dfrac{\ln(p)}{p}$ et $a_n = S(n) - S(n-1)$,on a

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{\ln(n)}{n} & \text{si } n \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

écrivons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} &= \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p}\frac{1}{\ln(p)} \\ &= \sum_{2\leq k\leqslant n} a_k \frac{1}{\ln(k)} \end{aligned}$$

d'après la question 16 on a, avec $b(t) = \dfrac{1}{\ln(t)}$,

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = A(n)\frac{1}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{1}{t(\ln(t))^2}A(t)dt$$

On a $A(n) = \sum\limits_{2\leq k\leqslant n} S(k) - S(k-1) = S(n)$ et $S(t) = R(t) + \ln(t)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} &= 1 + \frac{R(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}dt \\ &= 1 + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{R(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt. \end{aligned}$$

d'où l'on a $\boxed{\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \ln_2(n) - \ln_2(2) + \dfrac{R(n)}{\ln(n)} + \displaystyle\int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt.}$

(20b) D'après la question 19d on a $R(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(1)$, donc $\dfrac{R(t)}{t(\ln(t))^2} \underset{t\to+\infty}{=} O(\dfrac{1}{t(\ln(t))^2})$,

comme $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{t(\ln(t))^2}\,dt = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)}$ alors la fonction $t \mapsto \dfrac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

(20c) Écrivons

$$\int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt = \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt + \int_n^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}dt$$

avec

$$\int_n^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}dt = O(\int_n^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt) = O(\frac{1}{\ln(n)})$$

et $\frac{R(n)}{\ln(n)} = O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$, ce qui donne $\boxed{\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \dfrac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln_2(n) + c_1 + O\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)}$

avec $c_1 = 1 - \ln_2(2) + \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt.$

Ce résultat est le deuxième théorème de Mertens

21 ▷

(21a) Soit $x \geq 1$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0 (\operatorname{mod} q)\} = \{kq \ : k \in \mathbb{N} \cap [1, \frac{x}{q}]\ \}$$

donc $\operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0 (\operatorname{mod} q)\} = E(\frac{x}{q})$ et on sait que $\left|E(\frac{x}{q}) - \frac{x}{q}\right| \leq 1$, d'où le résultat .

(21b) Écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p\mid n\\ p\text{ premier}}} 1\\ &= \sum_{\substack{p\leq x\\ p\text{ premier}}}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n}} 1\\ &= \sum_{\substack{p\leq x\\ p\text{ premier}}} \operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}\cap[1,x] : n\equiv 0 (\operatorname{mod} p)\}\\ &= \sum_{\substack{p\leq x\\ p\text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p}\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) = \sum_{\substack{p\leq x\\ p\text{ premier}}}\frac{1}{p}+\frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leq x\\ p\text{ premier}}}\left(E\left(\frac{x}{p}\right)-\frac{x}{p}\right)$$

et

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{\substack{p\leq x\\ p\text{ premier}}}\left(E\left(\frac{x}{p}\right)-\frac{x}{p}\right)\right| \leq \frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leq x\\ p\text{ premier}}} 1 \leq 1$$

d'après question 20c on a $\boxed{\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) \underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x)+O(1)}$

C'est le théorème Hardy et Ramanujan, il donne $\ln_2(x)$ comme un ordre moyen de $\omega(x)$.

22 ▷

(22a) Écrivons

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - 2\,\frac{\ln_2(x)}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)+\ln_2(x)^2\frac{E(x)}{x}$$

d'après la question précédente on a

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2-\ln_2(x)^2+O(\ln_2(x))+\underbrace{\ln_2(x)^2\frac{E(x)-x}{x}}_{O(\frac{\ln_2(x)^2}{x})}$$

d'où $\boxed{\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2-\ln_2(x)^2+O\left(\ln_2(x)\right).}$

(22b) Pour tout $x\geq 2$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 &= \sum_{n\leqslant x}\left(\sum_{\substack{p_1\mid n\\ p_1\text{ premier}}}1\right)\left(\sum_{\substack{p_2\mid n\\ p_2\text{ premier}}}1\right)\\ &= \sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p_1\mid n\\ p_1\text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\mid n\\ p_2\text{ premier}}}1\\ &= \sum_{\substack{p_1\leq x\\ p_1\text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leq x\\ p_2\text{ premier}}}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p_1\mid n\text{ et }p_2\mid n}}1\\ &= \sum_{\substack{p_1\leq x\\ p_1\text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leq x\\ p_2\text{ premier}}}\operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1\mid n \text{ et } p_2\mid n\}\end{aligned}$$

(22c) On a

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1 \mid n \text{ et } p_2\mid n\} = \sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1p_2 \mid n\}$$
$$= \sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} E\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)$$

donc

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1 \mid n \text{ et } p_2\mid n\} = \sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \left(\frac{x}{p_1p_2}+O(1)\right)$$

- La somme $\displaystyle\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} O(1)$ est dominée par $\displaystyle\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} 1$ et on a

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} 1 = \sum_{\substack{p_1\leq x\\ p_1 \text{ premiers}}} \sum_{\substack{p_2\leq \frac{x}{p_1}\\ p_2 \text{ premiers}}} 1$$
$$\leq \sum_{\substack{p_1\leq x\\ p_1 \text{ premiers}}} \sum_{k\leq \frac{x}{p_1}} 1$$
$$\leq \sum_{\substack{p_1\leq x\\ p_1 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1}$$

ce qui donne $\displaystyle\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} O(1) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x\ln_2(x)\right)$.

- La somme $\displaystyle\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2}$ s'écrit

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2} - \sum_{\substack{p\leq x\\ p^2\leq x\\ p \text{ premiers}}} \frac{x}{p^2}$$

et $\displaystyle\sum_{\substack{p\leq x\\ p^2\leq x\\ p \text{ premiers}}} \frac{x}{p^2} \leq x\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^2}\leq \frac{\pi^2}{6}x$ donc elle est aussi dominée par $x\ln_2(x)$.

Remarquons que $\{(p_1,p_2) : p_1,p_2\leq\sqrt{x}\ \}\subset\{(p_1,p_2) : p_1,p_2\leq x \text{ et } p_1p_2\leq x\}\subset\{(p_1,p_2) : p_1,p_2\leq x\ \}$ donc

$$\left(\sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}\right)^2 \leq \sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \frac{1}{p_1p_2} \leq \left(\sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}\right)^2$$

et on a

$$\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{x}\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p} \underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(\sqrt{x})+c_1+O\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x)+\ln\left(1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)+c_1+O\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x)+c_1+O\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

ce qui donne

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \frac{1}{p_1p_2} \underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x)^2+O\left(\ln_2(x)\right)$$

et

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2} \underset{x\to+\infty}{=} x\ln_2(x)^2+O\left(x\ln_2(x)\right)$$

d'où $\boxed{\left(\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \mathrm{Card}\left\{n\in\mathbb{N}^*: n\leqslant x, p_1\mid n \text{ et } p_2\mid n\right\}\right)-x\ln_2(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x\ln_2(x)\right).}$

(22d) D'après 22b

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 &= \sum_{\substack{p_1\leq x\\ p_1 \text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leq x\\ p_2 \text{ premier}}} \mathrm{Card}\left\{n\in\mathbb{N}^*: n\leqslant x, p_1\mid n \text{ et } p_2\mid n\right\}\\ &= \sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}} \mathrm{Card}\left\{n\in\mathbb{N}^*: n\leqslant x, p_1\mid n \text{ et } p_2\mid n\right\}+\sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premiers}}} \mathrm{Card}\left\{n\in\mathbb{N}^*: n\leqslant x, p\mid n\ \right\}\end{aligned}$$

or $\sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premiers}}} \mathrm{Card}\left\{n\in\mathbb{N}^*: n\leqslant x, p\mid n\ \right\} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x\ln_2(x)\right)$ donc

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 \underset{x\to+\infty}{=} x\ln_2(x)^2+O\left(x\ln_2(x)\right)$$

et de la question 22a on a $\boxed{\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left(\omega(n)-\ln_2(x)\right)^2 \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\ln_2(x)\right).}$

23 ▷ On pose $S=\left\{n\geqslant 3: \left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|\geqslant\left(\ln_2(n)\right)^{1/4}\right\}$.

- On a $\mathrm{Card}(S\cap[1,x])=\mathrm{Card}(S\cap[\sqrt{x},x])+\mathrm{Card}(S\cap[1,\sqrt{x}])$ et $\mathrm{Card}(S\cap[1,\sqrt{x}])\leq\sqrt{x}$ donc $\mathrm{Card}(S\cap[1,x]) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{Card}(S\cap[\sqrt{x},x])+O(\sqrt{x})$.
- Remarquons que

$$\frac{1}{x}\sum_{n\in S\cap[\sqrt{x},x]}\left(\omega(n)-\ln_2(x)\right)^2 \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\ln_2(x)\right).$$

et pour tout $n\in S\cap[\sqrt{x},x]$ on a

$$\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|\leq\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|+\left|\frac{\ln_2(x)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|$$

et $0\leq\ln_2(x)-\ln_2(n)\leq\ln_2(x)-\ln_2(\sqrt{x})=-\ln(1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)})$ donc

$$\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|\leq\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|+\left|\frac{\ln(1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)})}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|$$

par suite

$$\begin{aligned}\left(\ln_2(\sqrt{x})\right)^{1/4}\mathrm{Card}(S\cap[\sqrt{x},x]) &\leq \sum_{n\in S\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|\\ &\leq \sum_{n\in S\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|+x\left|\frac{\ln(1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)})}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|\end{aligned}$$

l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\sum_{n\in S\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|\leq\sqrt{x}\left(\sum_{n\in S\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|^2\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}O\left(\sqrt{x\ln_2(x)}\right)=O(x)$$

donc $\displaystyle\sum_{n\in S\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right| = O(x)$ ce qui donne $(\ln_2(\sqrt{x}))^{1/4}\,\mathrm{Card}(S\cap[\sqrt{x},x]) = O(x)$.

Finalement

$$\mathrm{Card}(S\cap[1,x]) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{Card}(S\cap[\sqrt{x},x]) + O(\sqrt{x}) \underset{x\to+\infty}{=} O(x\left(\ln_2(\sqrt{x})\right)^{-1/4})$$

ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{Card}\{n\leqslant x : n\in S\} = 0.$$

Fin