



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

## MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

*Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

## Préambule

On étudie des propriétés de la série de fonctions de la variable réelle dont le terme général est,  $k$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$$u_k : x \mapsto \frac{1}{(k+x)^{\frac{3}{2}} + (k+x)^{\frac{1}{2}}}$$

Quand elle existe, on note la somme de cette série par :

$$U(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

L'origine historique de ce problème est au cœur de la troisième partie : la fonction  $U$  permet l'étude d'une fonction  $T$  associée à la définition de la spirale de Théodorus.

**PARTIE I**

Dans cette partie, on étudie des propriétés liées à la régularité de  $U$ , notamment son comportement aux bornes de son intervalle de définition, ainsi que son intégrabilité.

1. Montrer que le domaine de définition de  $U$  est  $]-1, +\infty[$ . Dans toute la suite, on note  $I$  cet intervalle.

2. a) Montrer que l'application  $x \mapsto \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(x)$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $]-1, +\infty[$ .

Tournez la page S.V.P.

b) En déduire alors :

i. que  $U$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ ,

ii. qu'il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels qu'au voisinage de  $-1$ , on ait :

$$U(x) \sim \frac{\lambda}{(x+1)^\mu}$$

3. a) Montrer que  $U$  est intégrable sur l'intervalle  $] -1, 0 ]$ .

b) Pour  $-1 < a < b$  et  $k$  entier naturel non nul, calculer  $\int_{[a,b]} u_k$ . On pourra poser  $t = \sqrt{x+k}$  pour  $x \in [a, b]$ .

c) Calculer  $\int_{]-1,0]} U$ .

4. On étudie  $U$  au voisinage de  $+\infty$ .

a) Trouver  $\lim_{+\infty} U$ .

b) Pour  $x \in I$  fixé, justifier l'intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  de l'application :

$$t \mapsto \frac{1}{(t+x)^{\frac{3}{2}} + (t+x)^{\frac{1}{2}}}$$

c) Trouver, à l'aide de  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^{\frac{3}{2}} + (t+x)^{\frac{1}{2}}}$ , un développement au voisinage de  $+\infty$  de la forme :

$$U(x) = \frac{\delta}{x^\nu} + O\left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right)$$

d)  $U$  est-elle intégrable sur  $[0, +\infty[$  ?

## PARTIE II

Dans cette partie, on étudie plus particulièrement :

$$U(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}$$

On pose :

$$\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}$$

5. a) Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul :

$$2\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq \rho_n \leq 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculer alors  $U(0)$  à  $10^{-1}$  près, en justifiant le nombre de termes utilisés. Combien faut-il de termes pour calculer  $U(0)$  à  $10^{-3}$  près ?

b) Donner aussi un équivalent simple de  $\rho_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On étudie maintenant un procédé permettant d'obtenir plus rapidement une valeur approchée de  $U(0)$  à  $10^{-3}$  près.

6. a) Montrer qu'il existe une unique suite de fonctions polynomiales sur  $[0, 1]$ , soit  $(B_n)$ , avec

$$B_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \geq 1 : \quad B'_n = nB_{n-1} \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} B_n = 0$$

b) i. On note  $b_n = B_n(0)$ . Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ ,  $b_n = B_n(1)$ .

ii. Calculer  $B_1, B_2, B_3$ .

c) Soit  $f \in C^3([0,1], \mathbb{R})$ . Montrer que :

$$\frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \int_{[0,1]} f + \int_0^1 B_1(x) f'(x) dx$$

puis que :

$$\frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \int_{[0,1]} f + \sum_{i=2}^3 (-1)^i \frac{b_i}{i!} [f^{(i-1)}(1) - f^{(i-1)}(0)] + \int_0^1 \frac{B_3(x)}{6} f^{(3)}(x) dx.$$

d) Montrer qu'il existe une unique fonction  $P_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de période 1, et telle que, pour tout  $x \in [0,1[$ ,  $P_n(x) = B_n(x)$ . On exprimera, pour  $x$  réel quelconque,  $P_n(x)$  en fonction notamment de  $x$  et de sa partie entière. Montrer que  $P_n$  est de classe  $C^\infty$  par morceaux et qu'elle est continue si et seulement si  $n \neq 1$ .

e) Soit  $f \in C^3([0, +\infty[, \mathbb{R})$ . Montrer que, pour tout entier naturel  $j$ , et pour tout entier naturel non nul  $m$  :

$$\sum_{k=j}^{m+j} f(k) = \frac{1}{2}[f(j) + f(m+j)] + \int_{[j, m+j]} f + \sum_{i=2}^3 (-1)^i \frac{b_i}{i!} [f^{(i-1)}(m+j) - f^{(i-1)}(j)] + \int_j^{m+j} \frac{P_3(x)}{6} f^{(3)}(x) dx$$

7. a) Etudier les variations de  $B_3$  sur  $[0, 1]$ . En déduire que, pour tout  $x$  réel,  $|P_3(x)| \leq 6 \cdot 10^{-2}$ .

b) Soit  $g: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$ , qui est donc de classe  $C^3$ . Calculer  $g'(x)$  pour  $x \geq 1$ .

On donne le résultat suivant, pour  $x \geq 1$  :

$$g''(x) = \frac{15x^2 + 10x + 3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^3},$$

et on admet aussi que  $g''$  est décroissante. En déduire l'intégrabilité de l'application :

$$[1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto P_3(x)g^{(3)}(x)$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $j$  :

$$\rho_{j-1} = \int_{[j, +\infty[} \left[ g + \frac{1}{2}g(j) - \frac{1}{12}g'(j) + \frac{1}{6} \int_j^{+\infty} P_3(x)g^{(3)}(x) dx \right]$$

d) En déduire une valeur approchée de  $U(0)$  à  $10^{-3}$  près.

### PARTIE III

Dans cette partie, on étudie une fonction  $T$  de la variable réelle et à valeurs complexes, qui utilise  $U$  de manière fondamentale.

8. On définit la série de fonctions de la variable réelle, et à valeurs complexes, dont le terme général est,  $k$  étant un entier naturel non nul :

$$v_k: x \mapsto \frac{i}{2} \frac{1}{(k+x)^{\frac{3}{2}} + i(k+x)}$$

a) Simplifier  $v_k - \frac{i}{2}u_k$ . En déduire que la série  $\left(\sum_{k \geq 1} v_k\right)$  converge lorsque  $x \in I$ . On définit alors l'application  $V: I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$ . Montrer que  $V(x) = \frac{i}{2}U(x) + \frac{1}{2(x+1)}$  pour tout  $x \in I$ .

b) Justifier la continuité de  $V$  sur  $I$ .

9. a) Montrer qu'il existe une unique fonction  $T: I \rightarrow \mathbb{C}$ , de classe  $C^1$ , telle que  $T$  ne s'annule pas sur  $I$ , et que :

$$\frac{T'}{T} = V \quad \text{et} \quad T(0) = 1$$

b) Montrer que, pour tout  $x \in I$  :

$$T(x) = \sqrt{1+x} e^{\frac{i}{2} \int_0^x U(t) dt}$$

c) Montrer que  $T$  se prolonge en une fonction continue sur  $[-1, +\infty[$  par  $T(-1) = 0$ . Ce prolongement est-il dérivable en  $-1$  ?

10. On se place dans  $\mathbb{R}^2$  euclidien canonique orienté. On considère alors l'arc plan  $\gamma$ , paramétré par :

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \sqrt{1+t} \vec{u} \left( \frac{1}{2} \int_0^t U(w) dw \right)$$

où l'on a noté  $\vec{u}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ .

a) Montrer que cet arc est de classe  $C^1$  et régulier. Donner  $\tan \psi(t)$ , où  $\psi(t)$  est une mesure de l'angle orienté entre le vecteur  $\vec{u} \left( \frac{1}{2} \int_0^t U(w) dw \right)$  et le vecteur tangent unitaire en  $f(t)$ . Que représente  $U(0)$  ?

b) Etant donné l'intégrabilité de  $U$  sur  $]-1, 0]$ , on prolonge  $\gamma$  en  $t = -1$  par  $f(-1) = 0$ . Montrer que l'arc ainsi obtenu admet en ce point une demi-tangente.

c) Tracer sommairement le support de  $\gamma$ .

**PARTIE IV**

Dans cette partie, on écrit  $U(x)$  sous la forme d'une intégrale.

11. a) Montrer que, pour  $t > 0$  donné, l'application :

$$]0, t[ \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{e^u}{\sqrt{u}}$$

est intégrable, puis que l'application :

$$g: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{u}} du$$

est de classe  $C^1$ . Donner  $g'(t)$  pour  $t > 0$ .

b) Soit  $\alpha > 1$ . Montrer que l'application :

$$h_\alpha: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-\alpha t} g(t)$$

est intégrable et montrer, en utilisant  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ , que :

$$\int_{]0, +\infty[} h_\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{\alpha-1}}$$

c) En déduire, pour tout entier naturel non nul  $k$  et tout  $x \in I$ , une expression intégrale de  $u_k(x)$ .

d) Soit les applications :

$$\varphi: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$$

$$F: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{-t} \int_0^{\sqrt{t}} e^{v^2} dv$$

Déduire de ce qui précède que, pour tout  $x \in I$ , l'application :

$$]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{\varphi(t)F(t)}{t} e^{-xt}$$

est intégrable, et que :

$$U(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)F(t)}{t} e^{-xt} dt$$

12. a) Montrer que  $U$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$ , et exprimer sous forme intégrale les dérivées successives de  $U$ .

b) Montrer que  $U$  est convexe sur  $I$ , et tracer sommairement le graphe de  $U$ .

**Fin de l'énoncé**