

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES C – ENS 2013 – MP

On commence par introduire une notation. Soit (x, y) dans $\mathbf{R}^2$ et θ dans $\mathbf{R}$, on note $x_\theta = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$ et $y_\theta = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$. En d'autres termes, on a

$$\begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ou encore $x_\theta + iy_\theta = e^{i\theta}(x + iy)$. Bien entendu il s'agit d'un abus de notation puisque x_θ et y_θ dépendent aussi de (x, y) .

I

1. Soit x et y dans $\mathbf{R}$. On pose $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. On dispose alors de θ dans $\mathbf{R}$ tel que $x + iy = \rho e^{i\theta}$ et donc $(x_{-\theta}, y_{-\theta}) = (\rho, 0)$. D'après la propriété caractéristique de F appliqué à x , y et $-\theta$, il vient directement $f(x)f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})f(0)$.

2. i) Nous supposons dans cette réponse qu'il faut interpréter la question comme le calcul du déterminant de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec le gradient de la fonction g donnée par $g(x, y) = f(x)f(y)$ ou avec celui de la fonction h donnée par $h(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, toutes deux définies sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Soit donc (x, y) dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Puisque g est un produit, on a $\nabla g(x, y) = (f(y)f'(x), f(x)f'(y))$ et il vient

$$\left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right] (f(x)f(y)) = xf(x)f'(y) - yf(y)f'(x).$$

Puisque h est radiale, son gradient est proportionnel au rayon vecteur et donc

$$\left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right] (f(\sqrt{x^2 + y^2})) = 0.$$

- ii) Les deux questions précédentes permettent de conclure, pour x et y réels avec y non nul, $xf(x)f'(y) - yf(y)f'(x) = 0$.

Si f est nulle, l'assertion est satisfaite en prenant α quelconque, par exemple nul. Sinon, soit y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$ et, par continuité de f , V un voisinage de y_0 où f ne s'annule pas. Soit enfin y non nul dans V . Alors, en posant $\alpha = \frac{f'(y)}{yf(y)}$, il vient, pour tout x dans

$$\mathbf{R}, \quad f'(x) = \alpha x f(x).$$

- iii) Puisqu'on a affaire à une équation différentielle linéaire (sous forme résolue) dont les coefficients sont définis sur $\mathbf{R}$, le problème de Cauchy donné par $y' = \alpha xy$ et $y(0) = \beta$ admet une unique solution définie sur $\mathbf{R}$. Puisque $x \mapsto \beta \exp(\alpha x^2/2)$ est une telle solution, il en résulte qu'un élément de F est nécessairement de cette forme. Réciproquement pour une telle fonction, on a, pour (x, y) dans $\mathbf{R}^2$, $f(x)f(y) = \beta^2 \exp(\alpha \|u\|^2/2)$ en notant $u = (x, y)$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique du plan réel. Par invariance par rotation de la norme euclidienne, on en déduit que f appartient à F et donc

$$F \cap C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+) = \{x \mapsto \beta \exp(\alpha x^2/2) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Une autre rédaction est la suivante. Toujours d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire sous forme résolue, soit f est identiquement nulle (et appartient alors à F), soit elle ne s'annule nulle part et est donc de signe constant (au sens strict) d'après le théorème de Bolzano (dit des valeurs intermédiaires). On a alors pour tout x réel et d'après le théorème de Leibniz-Newton (dit théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) :

$$\ln \left(\frac{f(x)}{f(0)} \right) = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int_0^x \alpha t dt = \alpha \frac{x^2}{2}$$

et donc, par composition par l'exponentielle, $f(x) = f(0) \exp(\alpha x^2/2)$. Réciproquement toute fonction de la forme $x \mapsto \beta \exp(\alpha x^2/2)$ étant dans F , on a bien trouvé tous les éléments de $F \cap C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$.

Remarque : à condition d'autoriser la fonction nulle et les variances infinies (i.e. les fonctions constantes), et de ne pas se soucier de la masse totale, l'ensemble obtenu est celui des gaussiennes centrées. Dit autrement, il s'agit du cône engendré par l'ensemble des gaussiennes centrées et la fonction constante égale à 1.

II

1. Bien que la partie II soit annoncée comme indépendante de la partie I, comme le raisonnement de I.1. n'utilise pas la régularité de f mais uniquement son appartenance à F , on peut appliquer le résultat obtenu en I.1. Par conséquent si $f(0) = 0$, alors pour tout couple (x, y) de réels, $f(x)f(y) = 0$ et il existe donc au plus un réel en lequel f ne s'annule pas. Par continuité de f , il ne peut en exister qu'un seul, donc $\boxed{f \text{ est nulle.}}$
2. i) On commence par démontrer que f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}_+$. Par l'absurde on considère $X = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid f(x) = 0\}$ et on suppose $X \neq \emptyset$. Alors, puisque X est non vide et est minoré par 0, il admet une borne inférieure que l'on note x . Par continuité de f et par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $f(x) = 0$, i.e. $x \in X$. (On pourrait aussi remarquer que X est fermé puisqu'image réciproque d'un fermé par une application continue.) De plus on en déduit également que x est non nul puisque $0 \notin X$. Mais alors d'après I.1, que l'on peut encore appliquer ici, on a

$$f \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 = f(x)f(0) = 0$$

et ceci contredit la définition de x puisque $0 < \frac{x}{\sqrt{2}} < x$ et $\frac{x}{\sqrt{2}} \in X$. Par conséquent X est vide et f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}_+$.

Soit alors y dans $\mathbf{R}$, on a, toujours grâce à I.1. que l'on peut appliquer ici, $f(y)^2 = f(\sqrt{2}|y|)f(0) \neq 0$ et donc $\boxed{f \text{ ne s'annule nulle part.}}$

- ii) Puisque f ne s'annule nulle part, d'après le théorème de Bolzano (dit des valeurs intermédiaires), f est de signe constant sur $\mathbf{R}$ (au sens strict). En particulier, pour x dans $\mathbf{R}_+$, $\sqrt{x}$ est bien défini et $f(\sqrt{x})/f(0)$ aussi et ce dernier quotient est un réel strictement positif. Par conséquent r est bien défini et on a, pour x et y dans $\mathbf{R}_+$,

$$r(x) + r(y) = \ln \left(\frac{f(\sqrt{x})f(\sqrt{y})}{f(0)^2} \right) = \ln \left(\frac{f(\sqrt{x+y})}{f(0)} \right) = r(x+y)$$

d'après I.1 (que l'on peut encore une fois appliquer ici), soit $r(x + y) = r(x) + r(y)$.

Remarque : on peut munir $\mathbf{R}$ d'une structure de groupe par transport de structure grâce à une bijection φ de $\mathbf{R}$ dans lui-même, via la formule $x \star y = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$. Par exemple en prenant pour φ une fonction puissance impaire, comme $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Dans le cas d'une puissance paire, cette formule permet de munir $\mathbf{R}_+$ d'une structure de monoïde (i.e. tous les axiomes d'un groupe sauf le symétrique). Comme $\ln$ est un morphisme de groupes entre $(\mathbf{R}_+, \times)$ et $(\mathbf{R}, +)$ et comme la formule I.1 montre que $\frac{1}{f(0)}f$ est un morphisme de monoïdes entre $(\mathbf{R}_+, \star)$ et $(\mathbf{R}_+, \times)$, on en déduit que r est un morphisme de monoïdes de $(\mathbf{R}_+, +)$ dans lui-même.

iii) Soit, pour s dans $\mathbf{R}_+$, $(\mathbf{H}_s)$ l'assertion : $\forall x \in \mathbf{R}_+, r(sx) = sr(x)$.

Par définition, $r(0) = 0$ et donc $(\mathbf{H}_0)$ est vraie. D'après ce qui précède, pour tous s et x dans $\mathbf{R}_+$, on a $r(sx + x) = r(sx) + r(x)$ et donc $(\mathbf{H}_s) \Rightarrow (\mathbf{H}_{s+1})$. En particulier, en spécialisant à $s \in \mathbf{N}$, le principe de récurrence permet de conclure que $(\mathbf{H}_s)$ est vraie pour s dans $\mathbf{N}$.

Puisque $\mathbf{R}_+$ est invariant par division par un entier naturel non nul, il vient, pour x dans $\mathbf{R}_+$, p dans $\mathbf{N}$ et q dans $\mathbf{N}^*$ et en posant $s = p/q$, $qr(sx) = r(qsx) = r(px) = pr(x)$ en appliquant $(\mathbf{H}_q)$ puis $(\mathbf{H}_p)$, et donc $r(sx) = sr(x)$ puisque q est non nul. Autrement dit $(\mathbf{H}_s)$ est vraie pour s dans $\mathbf{Q}_+$.

Par densité de $\mathbf{Q}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ et continuité de f , donc aussi de r puisque $\sqrt{\cdot}$ est continu de $\mathbf{R}_+$ dans lui-même et $\ln$ est continu de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, $(\mathbf{H}_s)$ est vraie pour s dans $\mathbf{R}_+$: si x est dans $\mathbf{R}_+$ et si s est limite d'une suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de rationnels positifs, alors $\lim s_n r(x) = sr(x)$ puisque $\lim$ est linéaire et $\lim r(s_n x) = r(sx)$ puisque $\lim s_n x = sx$ par linéarité de la limite et d'après le critère séquentiel de continuité.

En spécialisant à $x = 1$, il vient $r(s) = sr(1)$.

3. Pour x dans $\mathbf{R}$, l'équation obtenue en I.1, encore valide ici, donne $f(x)f(0) = f(|x|)f(0)$ et donc, si $f(0) \neq 0$, f est paire. C'est encore le cas si $f(0) = 0$ puisqu'alors f est nulle d'après II.1. Si f n'est pas nulle, on a donc, pour x dans $\mathbf{R}$,

$$f(x) = f(|x|) = f(\sqrt{x^2}) = f(0)e^{r(x^2)} = f(0)e^{x^2 r(1)}$$

et cette formule est encore valide si f est nulle. On retrouve donc les fonctions trouvées en I.2.iii). Comme on a déjà vérifié qu'elles appartiennent à F , on en conclut

$$F \cap C(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+) = \{x \mapsto \beta \exp(\alpha x^2/2) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\}.$$

III

1. Telle quelle l'assertion est fausse. On peut la rendre correcte en mettant des valeurs absolues ou, plus simplement, en supposant que les fonctions sont à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

On suppose donc que $(C_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de $C([0, 1], \mathbf{R}_+)$. Soit alors, pour n dans $\mathbf{N}$, $(\mathbf{H}_n)$ l'assertion : $\forall t \in \left[0, \inf \left(\frac{1}{4AK}, 1\right)\right], C_n(t) \leq 2A$.

Par hypothèse sur C_0 , $(\mathbf{H}_0)$ est vraie. Démontrons l'hérédité de l'assertion. Soit donc n dans $\mathbf{N}$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ est vraie et t dans $[0, 1]$, d'après l'inégalité de la moyenne, il vient

$$C_{n+1}(t) \leq A + K \int_0^t C_n(s)^2 \, ds \leq A + Kt \sup_{s \in [0, t]} C_n(s)^2.$$

D'après $(\mathbf{H}_n)$ si on a de plus $t \leq \frac{1}{4AK}$, alors pour tout s dans $[0, t]$ on a $0 \leq C_n(s) \leq 2A$ et donc $0 \leq C_n(s)^2 \leq 4A^2$, puis $C_{n+1}(t) \leq A + K \frac{1}{4AK} 4A^2 = 2A$.

D'après le principe de récurrence, on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in \left[0, \inf \left(\frac{1}{4AK}, 1 \right) \right], C_n(t) \leq 2A.}$$

2. Soit Φ la fonction sur $[0, T]$ définie par $\Phi(t) = e^{-Dt} \left(B + D \int_0^t \varphi(s) \, ds \right)$. Puisque φ est continue, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (Leibniz-Newton), Φ est de classe C^1 sur $[0, T]$ en tant que produit d'une exponentielle et d'une combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 . Sa dérivée est donnée sur $[0, T]$ par

$$\Phi'(t) = De^{-Dt} \left(\varphi(t) - B - D \int_0^t \varphi(s) \, ds \right)$$

et est donc négative par hypothèse sur φ . Il en résulte que Φ est décroissante sur $[0, T]$ et en particulier inférieure à sa valeur en 0. Par conséquent, pour t dans $[0, T]$, il vient $\varphi(t) \leq \Phi(t)e^{Dt} \leq \Phi(0)e^{Dt}$, par positivité de l'exponentielle, soit $\boxed{\varphi(t) \leq Be^{Dt}.}$

3. i) Soit t dans $[0, T_1]$ et n dans $\mathbf{N}^*$. On pose $B = K_1 \int_0^t J_{n-1}(s) \, ds$. Il en résulte, pour u dans $[0, t]$ et par positivité de l'intégrande,

$$J_n(u) \leq K_1 \int_0^u J_{n-1}(s) \, ds + K_1 \int_0^u J_n(s) \, ds \leq B + K_1 \int_0^u J_n(s) \, ds$$

et donc, d'après III.2, $J_n(u) \leq Be^{K_1 u}$. Par croissance de l'exponentielle et positivité de K_1 , on a donc $J_n(u) \leq Be^{K_1 T_1}$. Il en résulte, puisque ce résultat est vrai pour tout t dans $[0, T_1]$ et en spécialisant en u égal à t , $\boxed{J_n(t) \leq K_1 e^{K_1 T_1} \int_0^t J_{n-1}(s) \, ds.}$

- ii) On démontre l'assertion par une récurrence immédiate. Soit en effet, pour n dans $\mathbf{N}$,

$$(\mathbf{H}_n) \text{ l'assertion : pour } t \text{ dans } [0, T_1], J_n(t) \leq A_1 \frac{[K_1 t e^{K_1 T_1}]^n}{n!} \text{ (en convenant } 0^0 = 1).$$

Par hypothèse sur J_0 , $(\mathbf{H}_0)$ est vraie. Soit alors n dans $\mathbf{N}$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ soit vraie. On a, d'après $(\mathbf{H}_n)$, la question précédente et l'inégalité de la moyenne,

$$\forall t \in [0, T_1], \quad J_{n+1}(t) \leq K_1 e^{K_1 T_1} \int_0^t \left(A_1 \frac{[K_1 s e^{K_1 T_1}]^n}{n!} \right) \, ds = A_1 \frac{[K_1 t e^{K_1 T_1}]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le principe de récurrence permet de conclure que $(\mathbf{H}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n . Par positivité et croissance, on en conclut qu'on a, pour t dans $[0, T_1]$ et tout n dans

$$\mathbf{N}^*, \quad J_n(t) \leq A_1 \frac{\left[K_1 T_1 e^{K_1 T_1} \right]^n}{n!}.$$

IV

Pour simplifier les démonstrations, on introduit quelques notations :

1. On note $C_b([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel normé des fonctions continues et bornées sur le pavé $[0, 1] \times \mathbf{R}$ de $\mathbf{R}^2$, à valeurs réelles, muni de la norme infinie donnée par $\|f\|_\infty = \sup_{[0, 1] \times \mathbf{R}} |f|$.
2. On note g et $\tilde{g}$ les fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et sur $[0, 1] \times \mathbf{R}$ respectivement données par $g(x) = \tilde{g}(t, x) = \exp(x^2/2)$, et $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions f telles que $f\tilde{g}$ appartienne à $C_b([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$.
3. Comme $1/g$ est définie, car strictement positive, et bornée par 1 sur $\mathbf{R}$, $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ est en fait un sous-espace vectoriel de $C_b([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$. Toujours parce que $1/g$ est définie, on peut munir $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ de la norme donnée par $\|f\|_g = \|f\tilde{g}\|_\infty$. De plus $f \mapsto f\tilde{g}$ est un isomorphisme continu d'espaces vectoriels normés de $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ sur $C_b([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$.
4. On note $C_t^1([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions sur $[0, 1] \times \mathbf{R}$ telles que, pour tout x dans $\mathbf{R}$, l'application partielle $t \mapsto f(t, x)$ est dans $C^1([0, 1], \mathbf{R})$.
5. Enfin on note $G = C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R}) \cap C_t^1([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ et G^1 le sous-espace de G formé des fonctions f telles que $\frac{\partial f}{\partial t}$ appartient à $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Remarquons que $1/g$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ puisque continu sur $\mathbf{R}$ et dominé par $1/x^2$ en l'infini. En particulier, pour f dans $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ et t dans $[0, 1]$, on a, pour tout x réel $|f(t, x)| \leq \|f\|_g \frac{1}{g(x)}$ et donc, étant localement intégrable sur $\mathbf{R}$ puisque continu, $x \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. De plus, d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, $t \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(t, x) dx$ est alors continu sur $[0, 1]$.

L'argument précédent et le théorème de dérivation sous le signe intégral (règle de Leibniz) permettent de conclure que si f appartient à G^1 , alors $t \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(t, x) dx$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, de dérivée donnée par $\int_{\mathbf{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$.

1. i) Par hypothèse f_0 est défini par $f_0(t, x) = f_{in}(x)$ sur $[0, 1] \times \mathbf{R}$ et donc f_0 appartient à G puisque $f_{in}g$ est continu et borné par hypothèse, et que la dérivée partielle de f_0 par rapport à t est nulle.

Soit maintenant n dans $\mathbf{N}$ tel que f_n existe et appartient à G . Puisque f_n appartient à G , d'après les remarques de début de partie, $-2\pi \int_{\mathbf{R}} f_n(t, y) dy$ définit une fonction a_n continue sur $[0, 1]$ et bornée par la quantité $2\pi \|f_n\|_g \int_{\mathbf{R}} \exp(-y^2/2) dy$.

Pour x, y et θ réels, puisqu'on a $g(0) = 1$ et $g \in F$, $g(x_\theta)g(y_\theta) = g(x)g(y)$ en notant x_θ et y_θ les quantités réelles définies par $x_\theta + iy_\theta = e^{i\theta}(x + iy)$ avec une dépendance en x et y implicite. Puisque f_n appartient à G , on a

$$|g(x)f_n(t, x_\theta)f_n(t, y_\theta)| \leq \|f_n\|_g^2 \frac{g(x)}{g(x_\theta)g(y_\theta)} = \|f_n\|_g^2 \frac{1}{g(y)}$$

et donc $(t, x) \mapsto g(x) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} f_n(t, x_\theta)f_n(t, y_\theta) dy d\theta$ est une fonction continue sur $[0, 1] \times \mathbf{R}$, d'après le théorème de continuité sous le signe intégral. Autrement dit, la fonction $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t, x_\theta)f(t, y_\theta) dy d\theta$ définit une fonction b_n appartenant à $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ et telle que $\|b_n\|_g \leq 2\pi \|f_n\|_g^2 \int_{\mathbf{R}} \exp(-y^2/2) dy$.

Par conséquent l'équation (3) est équivalente à

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial t}(t, x) = a_n(t)f_{n+1}(t, x) + b_n(t, x).$$

Il résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire que, pour tout réel x , il existe une unique fonction dans $C^1([0, 1], \mathbf{R})$ solution de $y' = a_n(t)y + b_n(t, x)$ avec $y(0) = f_{in}(x)$.

Ceci démontre l'unicité de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

On note A_n la primitive de a_n sur $[0, 1]$ donnée par $A_n(t) = \int_0^t a_n(s) ds$, comme il est licite d'après le théorème de Leibniz-Newton par continuité de a_n . Alors, par variation de la constante, on a la formule, pour (t, x) dans $[0, 1] \times \mathbf{R}$,

$$f_{n+1}(t, x) = f_{in}(x)e^{A_n(t)} + \int_0^t b_n(s, x)e^{A_n(t)-A_n(s)} ds.$$

Puisque A_n est continu sur $[0, 1]$ et f_{in} l'est sur $\mathbf{R}$, le premier terme du membre de droite est continu sur $[0, 1] \times \mathbf{R}$ et, par hypothèse sur f_{in} , appartient en fait à $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$. De plus, d'après le théorème de Weierstraß, A_n est borné sur le compact $[0, 1]$ (et y atteint ses bornes). On note $\|A_n\|_\infty = \sup_{[0, 1]} |A_n|$ et il vient que l'intégrande dans le second terme est une fonction continue de (s, t, x) bornée par $e^{2\|A_n\|_\infty} \|b_n\|_g \exp(-x^2/2)$. Puisqu'on intègre sur un segment, la continuité de l'intégrande et la domination précédente assurent, via le théorème de continuité sous le signe intégral, que le second terme est dans $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$, de norme majorée par $e^{2\|A_n\|_\infty} \|b_n\|_g$. Il en résulte que f_{n+1} est dans $C_g([0, 1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$. L'équation (3) montre que la dérivée partielle par rapport à t de f_{n+1} existe et est continue, de sorte que f_{n+1} appartient à G et ceci assure

l'existence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Remarque : puisque a_n est borné et que f_{n+1} et b_n appartiennent à G , l'équation $\frac{\partial f_{n+1}}{\partial t}(t, x) = a_n(t)f_{n+1}(t, x) + b_n(t, x)$ entraîne qu'en fait f appartient à G^1 .

- ii) Soit, pour n dans $\mathbf{N}$, $(\mathbf{H}_n)$ l'assertion : $\forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}, f_n(t, x) > 0$.

Par hypothèse sur f_0 et f_{in} , $(\mathbf{H}_0)$ est vraie.

Soit maintenant n dans $\mathbf{N}$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ soit vraie. La formule

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t, x) &= f_{in}(x)e^{A_n(t)} + \int_0^t b_n(s, x)e^{A_n(t)-A_n(s)} \, ds \\ &= f_{in}(x)e^{A_n(t)} + \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} f_n(s, x\theta)f_n(s, y\theta)e^{A_n(t)-A_n(s)} \, ds \, d\theta \, dy \end{aligned}$$

exhibe f_{n+1} comme somme de termes positifs, le premier étant strictement positif puisque f_{in} est à valeurs strictement positives, une exponentielle est strictement positive et le second terme est l'intégrale d'une fonction positive.

Le principe de récurrence permet de conclure que $(\mathbf{H}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n et, a fortiori, pour tous (n, t, x) dans $\mathbf{N} \times [0, 1] \times \mathbf{R}$, $\boxed{f_n(t, x) \geq 0}$.

2. i) Pour n dans $\mathbf{N}$ et t dans $[0, 1]$, on pose $C_n(t) = \sup_{\mathbf{R}} f_n(t, x) \exp(x^2/2)$, ce qui est licite puisque f_n appartient à G , $A = \|f_0\|_g$ et $K = 2\pi \int_{\mathbf{R}} \exp(-y^2/2) \, dy$. Par conséquent C_0 est la fonction constante égale à A , et est donc continue. Par ailleurs, d'après l'équation (3) et le théorème de Lagrange (dit des accroissements finis), pour n dans $\mathbf{N}$, $f_{n+1}\tilde{g}$ est lipschitzienne par rapport à la première variable, de rapport α avec $\alpha = \|a_n\|_{\infty} \|f_{n+1}\|_g + \|b_n\|_g$. Soit donc t et t' dans $[0, 1]$, on a

$$f_{n+1}(t', x) \exp(x^2/2) \leq f_{n+1}(t, x) \exp(x^2/2) + \alpha|t - t'| \leq C_{n+1}(t) + \alpha|t - t'|$$

et, en passant au supremum, $C_{n+1}(t') \leq C_n(t) + \alpha|t - t'|$. En interchangeant les rôles de t et t' , on en conclut que C_{n+1} est lipschitzienne de rapport α et est donc en particulier continue. Par conséquent, pour tout entier n , $\boxed{C_n \text{ est continue.}}$

Avec les notations de la question IV.1 et en utilisant IV.1.ii), a_n est à valeurs négatives et donc A_n est décroissante. Comme $A_n(0) = 0$, A_n est aussi à valeurs négatives. La formule

$$f_{n+1}(t, x) = f_{in}(x)e^{A_n(t)} + \int_0^t b_n(s, x)e^{A_n(t)-A_n(s)} \, ds$$

permet d'obtenir, pour t dans $[0, 1]$ et x réel

$$0 \leq f_{n+1}(t, x)g(x) \leq A + \int_0^t b_n(s, x)g(x) \, ds .$$

Or, pour t dans $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} \int_0^t b_n(s, x)g(x) \, ds &= \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} f_n(s, x\theta)f_n(s, y\theta)g(x)g(y) \exp(-y^2/2) \, ds \, d\theta \, dy \\ &= \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} f_n(s, x\theta)g(x\theta)f_n(s, y\theta)g(y\theta) \exp(-y^2/2) \, ds \, d\theta \, dy \\ &\leq \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} C_n(s)^2 \exp(-y^2/2) \, ds \, d\theta \, dy \\ &\leq K \int_0^t C_n(s)^2 \, ds \end{aligned}$$

et donc $\boxed{C_{n+1}(t) \leq A + K \int_0^t C_n(s)^2 \, ds.}$

ii) Par définition, pour n dans $\mathbf{N}$, C_n est à valeurs positives. Comme C_0 est constante égale à A , la question précédente permet d'appliquer le résultat de la question III.1. En posant $T_1 = \inf \left(\frac{1}{4AK}, 1 \right)$, avec A et K comme dans la question précédente, il vient $T_1 \in]0, 1]$ et, pour tous n dans $\mathbf{N}$ et t dans $[0, T_1]$, $\boxed{C_n(t) \leq 2A}$.

3. i) Pour n dans $\mathbf{N}$ et t dans $[0, 1]$, on pose $J_n(t) = \sup_{\mathbf{R}} |f_{n+1}(t, x) - f_n(t, x)| \exp(x^2/2)$, ce qui est licite puisque f_n et f_{n+1} appartiennent à G . Comme, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $f_n \tilde{g}$ est lipschitzienne par rapport à la première variable, d'après les arguments de la question précédente et en utilisant que f_0 est constante par rapport à cette variable, J_n l'est également. Il en résulte que $\boxed{J_n \text{ est continue.}}$

Soit n dans $\mathbf{N}^*$ et (t, x) dans $[0, 1] \times \mathbf{R}$. Il vient, en utilisant les notations des deux questions précédentes,

$$|a_n(t)| \leq 2\pi \int_{\mathbf{R}} C_n(t) \exp(-x^2/2) dx = K C_n(t),$$

$$|a_n(t) - a_{n-1}(t)| \leq 2\pi \int_{\mathbf{R}} J_{n-1}(t) \exp(-x^2/2) dx = K J_{n-1}(t),$$

et

$$\begin{aligned} & \left(f_n(t, x_\theta) f_n(t, y_\theta) - f_{n-1}(t, x_\theta) f_{n-1}(t, y_\theta) \right) g(x) \\ &= \det \begin{pmatrix} f_n(t, x_\theta) & -f_{n-1}(t, y_\theta) \\ -f_{n-1}(t, x_\theta) & f_n(t, y_\theta) \end{pmatrix} g(x) \\ &= \det \begin{pmatrix} f_n(t, x_\theta) - f_{n-1}(t, x_\theta) & f_n(t, y_\theta) - f_{n-1}(t, y_\theta) \\ -f_{n-1}(t, x_\theta) & f_n(t, y_\theta) \end{pmatrix} g(x_\theta) g(y_\theta) \exp(-y^2/2) \\ &= \det \begin{pmatrix} (f_n(t, x_\theta) - f_{n-1}(t, x_\theta)) g(x_\theta) & (f_n(t, y_\theta) - f_{n-1}(t, y_\theta)) g(y_\theta) \\ -f_{n-1}(t, x_\theta) g(x_\theta) & f_n(t, y_\theta) g(y_\theta) \end{pmatrix} \exp(-y^2/2), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |b_n(t, x) - b_{n-1}(t, x)| g(x) &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} (J_{n-1}(t) C_n(t) + J_{n-1}(t) C_{n-1}(t)) \exp(-y^2/2) d\theta dy \\ &\leq K J_{n-1}(t) (C_{n-1}(t) + C_n(t)). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & |f_{n+1}(t, x) - f_n(t, x)| g(x) \\ &= \left| \int_0^t [a_n(s) f_{n+1}(s, x) - a_{n-1}(s) f_n(s, x) + b_n(s, x) - b_{n-1}(s, x)] g(x) ds \right| \\ &\leq \int_0^t [a_n(s) |f_{n+1}(s, x) - f_n(s, x)| g(x) + |a_n(s) - a_{n-1}(s)| f_n(s, x) g(x) \\ &\quad + |b_n(s, x) - b_{n-1}(s, x)| g(x)] ds \\ &\leq \int_0^t (K C_n(s) J_n(s) + K J_{n-1}(s) C_n(s) + K J_{n-1}(s) (C_{n-1}(s) + C_n(s))) ds \end{aligned}$$

et donc, puisque $K = 2\pi \int_{\mathbf{R}} \exp(-y^2/2) dy$,

$$J_n(t) \leq 2\pi \int_{\mathbf{R}} \exp(-y^2/2) dy \left[\int_0^t (2C_n(s) + C_{n-1}(s)) J_{n-1}(s) ds + \int_0^t C_n(s) J_n(s) ds \right].$$

- ii) En reprenant les notations précédentes, pour t dans $[0, T_1]$ et n dans $\mathbf{N}^*$, on a donc, par positivité de J_n et J_{n-1} ,

$$J_n(t) \leq K \int_0^t (6AJ_{n-1}(s) + 2AJ_n(s)) ds \leq 6AK \int_0^t (J_n(s) + J_{n-1}(s)) ds$$

ce qui est (2) avec $K_1 = 6AK$: la suite $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie (2).

- iii) Puisque $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de $C([0, T_1], \mathbf{R}_+)$ vérifiant (2), en posant $A_1 = \sup_{[0, T_1]} J_0$, ce qui est licite puisque J_0 est continu sur $[0, T_1]$, il vient d'après III.3 et pour (t, x) dans $[0, T_1] \times \mathbf{R}$

$$|f_{n+1}(t, x) - f_n(t, x)| \leq A_1 \frac{[K_1 T_1 e^{K_1 T_1}]^n}{n!}$$

et donc la série de fonctions $f_0 \tilde{g} + \sum_{n \geq 0} (f_{n+1} - f_n) \tilde{g}$ est normalement convergente dans

$C_b([0, T_1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$. Cette série de fonctions converge donc uniformément sur $[0, T_1] \times \mathbf{R}$. Comme les sommes partielles de cette série sont les termes de la suite $(f_n \tilde{g})_{n \in \mathbf{N}}$, on en déduit que cette suite converge uniformément sur $[0, T]$, avec $T = T_1$.

4. En tant que limite uniforme de fonctions continues, $f \tilde{g}$ est continue sur $[0, T] \times \mathbf{R}$.

Par convergence normale, on a de plus pour (t, x) dans $[0, T] \times \mathbf{R}$

$$0 < f(t, x)g(x) \leq A + A_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[K_1 T_1 e^{K_1 T_1}]^n}{n!},$$

la stricte positivité de f provenant du fait que c'est une somme de fonctions strictement positives d'après IV.2. Par conséquent $f \tilde{g}$ est bornée sur $[0, T] \times \mathbf{R}$.

Enfin la série de fonctions $f_0 + \sum_{n \geq 0} (f_{n+1} - f_n)$ est dérivable terme à terme par rapport à la

première variable, de série dérivée $\sum_{n \geq 0} (a_n f_{n+1} - a_{n-1} f_n + b_n - b_{n-1})$ en convenant $a_{-1} = b_{-1} =$

0. D'après les calculs effectués précédemment, il en résulte que le terme général de cette série est majoré en valeur absolue par celui de la série $\sum K(C_n J_n + (2C_n + C_{n-1})J_{n-1}) \frac{1}{g}$ et donc

aussi par celui de la série $6AK \sum (J_n + J_{n-1})$. Comme cette dernière série est normalement convergente sur $[0, T]$ en tant que somme de deux telles séries, d'après la question précédente, la série dérivée est normalement convergente sur $[0, T] \times \mathbf{R}$. D'après le théorème de dérivation des séries normalement convergentes, la somme de cette série est la dérivée de f par rapport à la première variable. Autrement dit $\lim_n \frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$ et en particulier pour tout x réel,

$t \mapsto f(t, x)$ est dans $C^1([0, T], \mathbf{R}_+)$.

Comme, pour (t, x) dans $[0, T] \times \mathbf{R}$, on a $|f_n(t, x)| \leq C_n(t) \exp(-x^2/2) \leq 2A \exp(-x^2/2)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir $\lim_n a_n(t) = -2\pi \int_{\mathbf{R}} f(t, y) dy$. De même, pour t dans $[0, T]$ et x, y et θ réels, on a $|f_n(t, x_\theta) f_n(t, y_\theta)| \leq 4A^2 \exp(-(x^2 + y^2)/2)$ et donc, par convergence dominée,

$$\lim_n b_n(t, x) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t, x_\theta) f(t, y_\theta) d\theta dy.$$

De $\frac{\partial f_{n+1}}{\partial t} = a_n f_{n+1} + b_n$ et $f_n(0, \cdot) = f_{in}$, et puisque le passage à la limite est compatible aux opérations algébriques, on déduit

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} \left[f(t, x \cos(\theta) - y \sin(\theta)) f(t, x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) - f(t, x) f(t, y) \right] dy d\theta \text{ pour } (t, x) \text{ dans } [0, T] \times \mathbf{R} \text{ et } f(0, x) = f_{in}(x), \text{ pour } x \text{ réel.}$$

Remarque : puisque f appartient à G , la formule précédente montre qu'en fait f appartient à G^1 .

V

1. i) Soit M une matrice inversible dans $M_2(\mathbf{R})$, avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $d \neq 0$. On pose

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T_2 = \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{d} & 0 \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Il vient alors } M = T_1 T_2, \det(T_1) = 1 \neq 0 \text{ et } \det(T_2) = ad - bc = \det(M) \neq 0, \text{ de sorte que}$$

$$T_1 \text{ est triangulaire supérieure inversible, } T_2 \text{ est triangulaire inférieure inversible et } M = T_1 T_2.$$

- ii) L'écriture $M(x, y)$ ne semble pas correcte. On l'interprète comme la valeur en (x, y) de l'application linéaire canoniquement associée à M .

L'hypothèse sur h se récrit $|h| \leq H \exp(-L \|\cdot\|^2)$, où $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2$. Par continuité des applications linéaires en dimension finie, si h vérifie cette hypothèse pour H et L , il en est de même pour $h \circ M$ pour H et $L \|M\|^2$, où $\|M\|$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne. De plus h , et donc aussi $h \circ M$, sont alors intégrables sur $\mathbf{R}^2$ puisque continues et majorées en valeur absolue par une fonction intégrable.

Soit M dans $M_2(\mathbf{R})$ inversible avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Soit T_0 la matrice triangulaire in-

férieure inversible $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $d = 0$ alors $T_0 M$ est inversible et son coefficient d'indice

$(2, 2)$ est égal à b , qui est non nul puisque le déterminant de M est alors $-bc$ et est non nul. Par conséquent, d'après la question précédente, on dispose de T_1 et T_2 triangulaires inversibles telles que soit $M = T_1 T_2$, soit $T_0 M = T_1 T_2$. Dans ce dernier cas $M = T_0^{-1} T_1 T_2$ et ceci exhibe M comme produit de trois matrices triangulaires inversibles.

Il suffit donc de démontrer l'assertion lorsque M est triangulaire puisque le déterminant est multiplicatif et les hypothèses sur h sont stables par composition avec une application linéaire. Quitte à échanger l'ordre d'intégration, échanger les deux variables et transposer la matrice, on peut supposer que M est triangulaire inférieure, i.e. $b = 0$. On s'intéresse donc à

$$|ad| \int_{\mathbf{R}^2} h(ax, cx + dy) \, dx \, dy,$$

i.e. à la limite quand α, α' tendent vers $-\infty$ et β, β' tendent vers $+\infty$ de

$$|ad| \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha'}^{\beta'} h(ax, cx + dy) \, dx \, dy.$$

Par changement de variable affine, cette dernière intégrale est égale à

$$\varepsilon(d)|a| \int_{\alpha}^{\beta} \int_{d\alpha' + cx}^{d\beta' + cx} h(ax, y) \, dx \, dy,$$

où $\varepsilon(d)$ est le signe de d . Puisque l'intégrande est intégrable sur $\mathbf{R}^2$, le théorème de Fubini assure que l'intégrale intérieure converge et que la limite quand α' tend vers $-\infty$ et β' tend vers $+\infty$ vaut

$$|a| \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\mathbf{R}} h(ax, y) \, dx \, dy$$

i.e.

$$\varepsilon(a) \int_{a\alpha}^{a\beta} \int_{\mathbf{R}} h(x, y) \, dx \, dy.$$

Toujours grâce au théorème de Fubini, cette intégrale converge et on obtient

$$|ad| \int_{\mathbf{R}^2} h(ax, cx + dy) \, dx \, dy = \int_{\mathbf{R}^2} h(x, y) \, dx \, dy.$$

On en conclut $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) \, dx \, dy = |\text{Det}(M)| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(M(x, y)) \, dx \, dy.}$

2. Soit γ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\gamma(x) = 1 + x^2$ et ϕ dans $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que ϕ/γ soit bornée. On dispose donc de C dans $\mathbf{R}_+$ tel que $|\phi| \leq C\gamma$. On note $\tilde{f}$ la fonction définie sur $[0, T] \times \mathbf{R}$ par $\tilde{f}(t, x) = f(t, x)\phi(x)$. D'après la question IV.4, c'est une fonction de classe C^1 par rapport à la première variable, continue par rapport à la seconde en tant que produit de telles fonctions et on dispose de D dans $\mathbf{R}_+$ tel que $|f| \leq D \frac{1}{\gamma}$ sur $[0, T] \times \mathbf{R}$.

Par conséquent, pour (t, x) dans $[0, T] \times \mathbf{R}$, on a $|\tilde{f}(t, x)| \leq CD \exp(-x^2/2)\gamma(x)$ et cette dernière fonction est continue et intégrable au voisinage de l'infini puisqu'elle y est négligeable devant $\frac{1}{\gamma}$. D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, la fonction Φ définie sur $[0, T]$ par

$$\Phi(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t, x)\phi(x) \, dx$$

est continue.

L'expression de $\frac{\partial f}{\partial t}$ obtenue en IV.4 permet également d'obtenir

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, x) g(x) \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} D^2 \exp(-y^2/2) \, d\theta \, dy + 2\pi D \int_{\mathbf{R}} D \exp(-y^2/2) \, dy \\ &\leq 4\pi D^2 \int_{\mathbf{R}} \exp(-y^2/2) \, dy \end{aligned}$$

et on peut donc appliquer la règle de Leibniz (théorème de dérivation sous le signe intégral) : Φ est de classe C^1 sur $[0, T]$ et on a

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \phi(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} \left[f(t, x_{\theta}) f(t, y_{\theta}) - f(t, x) f(t, y) \right] \phi(x) \, dx \, d\theta \, dy . \end{aligned}$$

De plus l'intégrande est majoré en valeur absolue par $D^2 C \gamma(x) \exp(-(x^2 + y^2)/2)$ et cette fonction est continue et intégrable en fonction de (x, θ, y) sur $\mathbf{R} \times [-\pi, \pi] \times \mathbf{R}$. De plus le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique pour toute intégration par rapport à l'une des variables ou par rapport à deux variables et fournit également une majoration, en valeur absolue, des intégrandes. On peut donc appliquer le théorème de Fubini et il vient $\Phi'(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t, \theta) \, d\theta$, avec

$$\psi(t, \theta) = \int_{\mathbf{R}^2} \left[f(t, x_{\theta}) f(t, y_{\theta}) - f(t, x) f(t, y) \right] \phi(x) \, dx \, dy .$$

D'après les majorations déjà obtenues, on peut appliquer la question précédente avec les transformations linéaires inversibles suivantes : $(x, y) \mapsto (y, x)$, $(x, y) \mapsto (x_{-\theta}, y_{-\theta})$ et $(x, y) \mapsto (y_{\theta}, x_{\theta})$. En notant r_{θ} la rotation d'angle θ et σ la symétrie par rapport à la première bissectrice, on a $r_{\theta} \circ \sigma = \sigma \circ r_{-\theta}$. Puisque $(x_{\theta}, y_{\theta}) = r_{\theta}(x, y)$, il vient

$$\begin{aligned} \psi(t, \theta) &= \int_{\mathbf{R}^2} \left[f(t, x_{\theta}) f(t, y_{\theta}) - f(t, x) f(t, y) \right] \phi(x) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} \left[f(t, y_{-\theta}) f(t, x_{-\theta}) - f(t, x) f(t, y) \right] \phi(y) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} \left[f(t, x) f(t, y) - f(t, x_{-\theta}) f(t, y_{-\theta}) \right] \phi(x_{-\theta}) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} \left[f(t, y) f(t, x) - f(t, y_{\theta}) f(t, x_{\theta}) \right] \phi(y_{\theta}) \, dx \, dy \end{aligned}$$

et il vient en intégrant par rapport à θ , éventuellement après un changement de variable affine

$$\theta \mapsto -\theta,$$

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \left[f(t, x_{\theta}) f(t, y_{\theta}) - f(t, x) f(t, y) \right] \phi(x) \, dx \, dy \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \left[f(t, y_{\theta}) f(t, x_{\theta}) - f(t, x) f(t, y) \right] \phi(y) \, dx \, dy \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \left[f(t, x) f(t, y) - f(t, x_{\theta}) f(t, y_{\theta}) \right] \phi(x_{\theta}) \, dx \, dy \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \left[f(t, y) f(t, x) - f(t, y_{\theta}) f(t, x_{\theta}) \right] \phi(y_{\theta}) \, dx \, dy \, d\theta\end{aligned}$$

et donc, en prenant la moyenne de ces quatre expressions et en réutilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} f(t, x) \phi(x) \, dx &= \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t, x \cos \theta - y \sin \theta) f(t, x \sin \theta + y \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. - f(t, x) f(t, y) \right] \times \left[\phi(x) + \phi(y) - \phi(x \cos \theta - y \sin \theta) - \phi(x \sin \theta + y \cos \theta) \right] d\theta \, dx \, dy.\end{aligned}$$

3. i) La fonction ϕ constante et égale à 1 vérifie les hypothèses de la question précédente et on en déduit

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} f(t, x) \, dx = 0.$$

On a donc affaire à une fonction constante par rapport à la première variable. Il en résulte, pour tout t dans $[0, T]$,

$$\int_{\mathbf{R}} f(t, x) \, dx = \int_{\mathbf{R}} f_{in}(x) \, dx.$$

- ii) Soit t dans $[0, T]$ et x réel. D'après la question précédente et la question IV.4, on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + 2\pi f(t, x) \int_{\mathbf{R}} f_{in}(y) \, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t, x_{\theta}) f(t, y_{\theta}) \, d\theta \, dy \geq 0,$$

puisque l'intégrande est positif. Il en résulte que

$$f(t, x) e^{2\pi t \int_{\mathbf{R}} f_{in}(y) \, dy}$$

est une fonction croissante de t , donc minorée par sa valeur en 0, i.e. $f_{in}(x)$, donc

$$f(t, x) \geq f_{in}(x) e^{-2\pi t \int_{\mathbf{R}} f_{in}(y) \, dy}.$$

4. i) Soit V la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $V(y) = y \ln(y)$. C'est une fonction de classe C^∞ . On se donne des constantes S_1 et S_2 comme dans l'énoncé.

On a déjà remarqué que f est à valeurs strictement positives (et cela résulte aussi de la question précédente), donc $\ln(f)$ est bien défini. Par conséquent la fonction $f \ln(f)$ est continue en x et de classe C^1 en t pour (t, x) dans $[0, T] \times \mathbf{R}$, par composition avec V .

Par hypothèse sur f et d'après IV.4, on dispose de deux constantes strictement positives C et D telles que, pour t dans $[0, T]$ et x réel, on ait

$$D \exp(-S_2 x^2) \leq f(t, x) \leq C \exp(-x^2/2)$$

avec $D = S_1 \exp(-2\pi T \int_{\mathbf{R}} f_{in}(y) dy)$. Pour t dans $[0, T]$ et x réel, par croissance du logarithme, on en déduit

$$|\ln(f(t, x))| \leq \max \left(|\ln(D)| + S_2 x^2, |\ln(C)| + \frac{1}{2} x^2 \right)$$

et on dispose d'une constante α strictement positive telle que

$$|\ln(f(t, x))| \leq \alpha(1 + x^2),$$

d'où l'existence de β dans $\mathbf{R}_+$ tel que

$$|V(f(x, t))| \leq \beta(1 + x^2) \exp(-x^2/2)$$

et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \cdot (1 + \ln(f(x, t))) \right| \leq \beta(1 + x^2) \exp(-x^2/2)$$

avec $\beta = \max(\alpha C, (\alpha + 1)4\pi C^2 \int_{\mathbf{R}} \exp(-y^2/2) dy)$, d'après les calculs menés en V.2. D'après la règle de Leibniz, on en déduit que la fonction Ψ définie sur $[0, T]$ par

$$\Psi(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t, x) \ln(f(t, x)) dx$$

est de classe C^1 sur $[0, T]$ et sa dérivée est donnée par

$$\Psi'(t) = \int_{\mathbf{R}} (1 + \ln(f(t, x))) \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

ou encore

$$\Psi'(t) = \int_{\mathbf{R}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} \left[f(t, x_{\theta}) f(t, y_{\theta}) - f(t, x) f(t, y) \right] \times (1 + \ln(f(t, x))) dx d\theta dy.$$

Les arguments de la question V.2 s'adaptent directement et il vient

$$\Psi'(t) = \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} \left[f(t, x_{\theta}) f(t, y_{\theta}) - f(t, x) f(t, y) \right] \ln \left(\frac{f(t, x) f(t, y)}{f(t, x_{\theta}) f(t, y_{\theta})} \right) dx d\theta dy.$$

Par croissance du logarithme l'intégrande, qui est la forme $(a - b)(\ln(b) - \ln(a))$, est négatif et donc Ψ' est négatif, i.e. $\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} f(t, x) \ln(f(t, x)) dx \leq 0$.

- ii) Dans la question précédente, l'intégrale considérée n'est nulle que si l'intégrande est identiquement nul, par continuité de cet intégrande, i.e. si et seulement si $x \mapsto f(t, x)$ appartient à F . Comme cette fonction est continue, à valeurs strictement positives et tend vers 0 à l'infini, on déduit de la partie II qu'il existe C_1 et C_2 dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que, pour tout x réel, $f(t, x) = C_1 \exp(-C_2 x^2)$.

Remarque : en fait on a directement $C_2 \geq \frac{1}{2}$.