

Mines-Ponts 2002, PSI — épreuve 2 (3h) — corrigé

PARTIE I

Exemples, résultats généraux

Remarquons tout d'abord que E est une équation linéaire d'ordre 2 et que E_0 est l'équation "sans second membre" associée. On sait que l'espace des solutions de E est un espace affine de dimension 2 dont la direction est l'espace vectoriel des solutions de E_0 .

La condition C n'est pas une condition à la Cauchy, de sorte que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas aux problèmes P_0 et P .

Question I.1

Exemples

I.1.a. E s'écrit ici $-u'' = 1$, les solutions de E sur I sont les $u : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + ax + b$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ajoutant la condition C , on obtient l'unique solution du problème $P : u : x \mapsto \frac{x(1-x)}{2}$.

I.1.b. E s'écrit ici $-u'' + u = e^{\alpha x}$. On résout d'abord l'équation homogène $E_0 : -u'' + u = 0$, l'espace des solutions est $\{u : x \mapsto a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Trois cas sont à considérer : si $\alpha \neq \pm 1$, une solution particulière de E est $u : x \mapsto \frac{1}{1-\alpha^2}e^{\alpha x}$. Ajoutant la condition C , on obtient l'unique solution du problème $P : u : x \mapsto \frac{1}{1-\alpha^2}(e^{\alpha x} - \operatorname{ch} x - \frac{e^\alpha - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x)$.

Si $\alpha = 1$, une solution particulière de E est $u : x \mapsto -\frac{x}{2}e^x$. Ajoutant la condition C , on obtient l'unique solution du problème $P : u : x \mapsto \frac{e^2}{e^2-1} \operatorname{sh} x - \frac{xe^x}{2}$.

Si $\alpha = -1$, une solution particulière de E est $u : x \mapsto \frac{x}{2}e^{-x}$. Ajoutant la condition C , on obtient l'unique solution du problème $P : u : x \mapsto -\frac{1}{e^2-1} \operatorname{sh} x + \frac{xe^{-x}}{2}$.

Question I.2

Unicité des solutions

I.2.a. Comme u est solution de E_0 , $u''(x) = p(x)u(x)$ et donc $u'(x)^2 + p(x)u(x)^2 = u'(x)^2 + u''(x)u(x)$ où on reconnaît la dérivée de $u(x)u'(x)$.

Alors $\int_0^1 (u'(x)^2 + p(x)u(x)^2) dx = [u(x)u'(x)]_0^1 = 0$ car u vérifie la condition C .

Mais p est continue et positive sur I , de sorte que $x \mapsto u'(x)^2 + p(x)u(x)^2$ est une fonction positive et continue sur I d'intégrale nulle, donc constante nulle sur cet intervalle. On en déduit que u' est constante nulle sur I , donc u constante sur I et C conclut que $u = 0$.

La fonction nulle (qui est évidemment solution) est la seule solution du problème P_0 .

I.2.b. Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème P , $u = u_1 - u_2$ est solution du problème P_0 , donc nulle, donc $u_1 = u_2$: il y a bien unicité de l'éventuelle solution du problème P .

Question I.3

Existence d'une solution

I.3.a. Par linéarité, g est solution de E_0 . On a bien sûr $g(0) = 0$, et si on ajoute la condition $g(1) = 0$, g devient une solution du problème P_0 , donc $g = 0$ d'après la question précédente.

g s'annule en 1 si et seulement si g s'annule sur tout I c'est-à-dire si et seulement si u_1 et u_2 sont proportionnelles. Dans le cas particulier où u_1 et u_2 forment un système fondamental de solutions de l'équation E_0 , on est assuré que g ne s'annule pas en 1.

I.3.b. Pour toutes valeurs de (λ, μ) , la fonction u proposée est solution de l'équation E . On cherche donc à écrire matriciellement la condition $C : u(1) = u(0) = 0$ se traduit par $UX = B$ où $U = \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} -v(0) \\ -v(1) \end{pmatrix}.$$

I.3.c. Choissant pour (u_1, u_2) un système fondamental de solutions de l'équation E_0 et pour v une solution particulière de E , ce que la théorie nous permet de faire, on a déjà dit que $\det U = u_1(0)u_2(1) - u_1(1)u_2(0) \neq 0$. On obtient donc un couple (λ, μ) tel que $\lambda u_1 + \mu u_2 + v$ est solution du problème P : c'est le résultat d'existence qui nous manquait encore.

PARTIE II

Quelques propriétés de certaines matrices de $M_n(\mathbb{R})$

Question II.1

Quelques propriétés matricielles

II.1.a. Les vecteurs images par A des vecteurs de la base canonique sont les vecteurs colonnes de la matrice. Dire que A est positive est bien équivalent à dire que tous ses vecteurs colonnes le sont.

II.1.b. L'inégalité est trivialement vérifiée si X est le vecteur nul. Sinon, notons $X' = \frac{1}{\|X\|}X$, qui est de norme 1.

On a $\|AX'\| \leq N(A) = \sup_{\|Y\| \leq 1} \|AY\|$ donc $\|AX\| = \|X\| \cdot \|AX'\| \leq N(A)\|X\|$.

II.1.c. Soit A positive. Soit $X = (x_i)$ tel que $\|X\| \leq 1$. On a

$$\|AX\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

On en déduit qu'on a bien $N(A) = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

Or $\|E\| = 1$ et $\|AE\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \|A\|$ d'où finalement l'égalité : $N(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

II.1.d. Soit X un vecteur du noyau de A : $AX = 0 \geq 0$ donc $X \geq 0$ mais aussi $A(-X) = 0 \geq 0$ donc $-X \geq 0$. Finalement, $X = 0$, ce qui montre que A est injective. Comme A est une matrice carrée, son injectivité entraîne son inversibilité. Finalement, si C_j est la j -ème colonne de A^{-1} c'est que $AC_j = e_j \geq 0$ donc $C_j \geq 0$: toutes les colonnes de A^{-1} sont positives, donc A^{-1} est positive.

Question II.2

Un exemple

II.2.a. On procède selon les indications de l'énoncé, à ceci près qu'on appelle k le plus petit entier tel que $x_k = \min_{0 \leq i \leq n+1} x_i$.

On suppose que X n'est pas positif, donc $k \neq 0$, $k \neq n+1$ et $x_k < 0$.

Observons que $|x_k| = -x_k = \max_{0 \leq i \leq n+1} (-x_i) = \max_{1 \leq i \leq n, x_i < 0} |x_i|$.

Dire $(A+H)X \geq 0$ c'est écrire, pour $1 \leq i \leq n$, $(2+h_i)x_i \geq x_{i-1} + x_{i+1}$.

Quand $i = k$, on en déduit que $x_{k-1} + x_{k+1} \leq 0$, puis que $(2+h_k)|x_k| \leq |x_{k-1} + x_{k+1}| \leq |x_{k-1}| + |x_{k+1}| \leq 2|x_k|$, d'où $h_k|x_k| \leq 0$ et $h_k = 0$. Mais alors $|x_{k-1}| + |x_{k+1}| = 2|x_k|$ donc finalement $x_{k-1} = x_{k+1} = x_k$. C'est la contradiction attendue, puisque par définition de k , $x_{k-1} > x_k$.

II.2.b. D'après la question II.1.d, $A+H$ est inversible et son inverse $(A+H)^{-1}$ est positive. Considérant le cas particulier $H = 0$, on en déduit également que A est inversible et que A^{-1} est positive.

Question II.3

Norme de la matrice $(A+H)^{-1}$

II.3.a. D'après ce qu'on vient de dire $(A+H)^{-1} \geq 0$, $E \geq 0$ donc $V \geq 0$ et de même $A^{-1} \geq 0$ donc $W \geq 0$. Enfin, $A(W-V) = E - AV = (A+H)V - AV = HV = (h_i v_i)$ qui est évidemment positif aussi.

II.3.b. Appliquant II.1.a avec $H = 0$, on déduit de $A(W-V) \geq 0$ que $W-V \geq 0$. Or $V \geq 0$ et $W \geq 0$, donc finalement, $\forall i, w_i \geq v_i \geq 0$ et donc $\|W\| \geq \|V\|$.

Or on a vu en II.1.c que, comme $(A+H)^{-1} \geq 0$, $N((A+H)^{-1}) = \|(A+H)^{-1}E\| = \|V\| \leq \|W\|$, d'où l'inégalité valable pour tout X , d'après II.1.b : $\|(A+H)^{-1}X\| \leq \|W\|\|X\|$.

Question II.4

Une majoration de la norme du vecteur W

II.4.a. L'application $\begin{pmatrix} S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_k) \longmapsto (x_0, x_1) \end{pmatrix}$ est clairement linéaire, injective (par une récurrence immédiate) et surjective (de la même façon). Donc S_0 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2. Les suites (1) et (k) en forment une base donc $S_0 = \{(x_k)_{k \geq 0}, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall k, x_k = a + bk\}$.

II.4.b. On vérifie que la suite $(-\frac{1}{2}k^2)_{k \geq 0}$ est dans S .

II.4.c. Une suite (x_k) est dans S si et seulement si la suite de terme général $x_k + \frac{1}{2}k^2$ est dans S_0 . On en déduit la forme générique d'une suite élément de S : $\forall k, x_k = a + bk - \frac{1}{2}k^2$.

Si on ajoute les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ on obtient une unique solution, la suite de terme général $x_k = \frac{k(n+1) - k^2}{2}$.

II.4.d. Notons $W = (w_1, \dots, w_n)$, ajoutons $w_0 = w_{n+1} = 0$. La suite tronquée $(w_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ vérifie la récurrence qui définit S et les conditions imposées aux rangs $k = 0$ et $k = n + 1$. On a donc nécessairement $\forall k \in \{1, \dots, n\}, w_k = \frac{k(n+1) - k^2}{2} \geq 0$. Une étude rapide sur $[0, n+1]$ de $x \mapsto x(n+1) - x^2$ montre que $\|W\| = \max_{1 \leq k \leq n} |w_k| \leq \frac{(n+1)^2}{8}$ (obtenu quand $x = (n+1)/2$).

PARTIE III

Approximation de la solution du problème P

Question III.1

Une approximation de la dérivée seconde

L'inégalité de Taylor-Lagrange au rang 4 en t fournit : $u(t \pm h) = u(t) \pm hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(t) \pm \frac{h^3}{6}u'''(t) + R_4(t, \pm h)$ où $|R_4(t, \pm h)| \leq \frac{M}{24}h^4$.

On en déduit que $u(t+h) + u(t-h) - 2u(t) = h^2u''(t) + R(t, h)$ où $R(t, h) = R_4(t, h) + R_4(t, -h)$ donc $|R(t, h)| \leq \frac{M}{12}h^4$.

Question III.2

Problème P discrétisé

III.2.a. Si p et f sont de classe $\mathcal{C}^2$ et si u est une solution de P , u est de classe $\mathcal{C}^2$ et $u'' = p(x)u(x) - f(x)$ également, donc finalement u est de classe $\mathcal{C}^4$.

III.2.b. On suppose ici que u est la solution du problème P .

On remarque que $u(t_0) = u(0) = u(1) = u(t_{n+1}) = 0$.

Alors la k -ème composante de Z s'écrit :

$$z_k = 2u(t_k) - u(t_k - h) - u(t_k + h) + p(t_k)u(t_k)h^2 - f(t_k)h^2 = 2u(t_k) - u(t_k + h) - u(t_k + h) + h^2u''(t_k) = -R(t_k, h).$$

On en déduit que $\|Z\| \leq M \frac{h^4}{12}$.

III.2.c. On a $X - \tilde{X} = (A + H)^{-1}Z$, donc, d'après II.3.b puis II.4.d,

$$\|X - \tilde{X}\| \leq \|W\|\|Z\| \leq M \frac{(n+1)^2}{8} \frac{h^4}{12} = \frac{M}{96(n+1)^2}.$$

C'est dire que $\tilde{X}$ est une approximation de X à un $O(1/n^2)$ près.

$\tilde{X}$ est donc une approximation de la table des valeurs prises par u sur une subdivision à pas constant de $[0, 1]$ en $(n+1)$ intervalles. On vient de constater qu'il s'agit d'une bonne approximation.

On calcule $\tilde{X}$ en résolvant le système $(A + H)\tilde{X} = Y$, ce qui peut se faire par exemple par une méthode de Gauss.

On trouvera ci-dessous une figure correspondant à l'équation $-u''(x) + \operatorname{sh} 3x u(x) = e^{-x} \sin 2\pi x$. On a tracé la solution en trait continu (grâce aux logiciels de calcul formel), et les approximations correspondant à $n = 3$ et $n = 7$ en traits pointillés.

