I Étude d'une fonction

1 – Sur $\mathbb{R}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^1$, et même $\mathcal{C}^\infty$, par composée d'applications élémentaires de même classe.

Toujours sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Notons que la dérivée f' est toujours négative. L'application f sera donc décroissante sur tout intervalle où elle est définie.

2 – La limite d'une exponentielle en $-\infty$ est 0, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

3 – $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$, par application du théorème des croissances comparées.

Donc f est dérivable à gauche en 0, de dérivée nulle.

On aurait aussi pu calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$. Comme cette limite existe et vaut 0, on aurait conclu également. Par contre, si f' n'avait pas eu de limite, on n'aurait pas pu conclure...

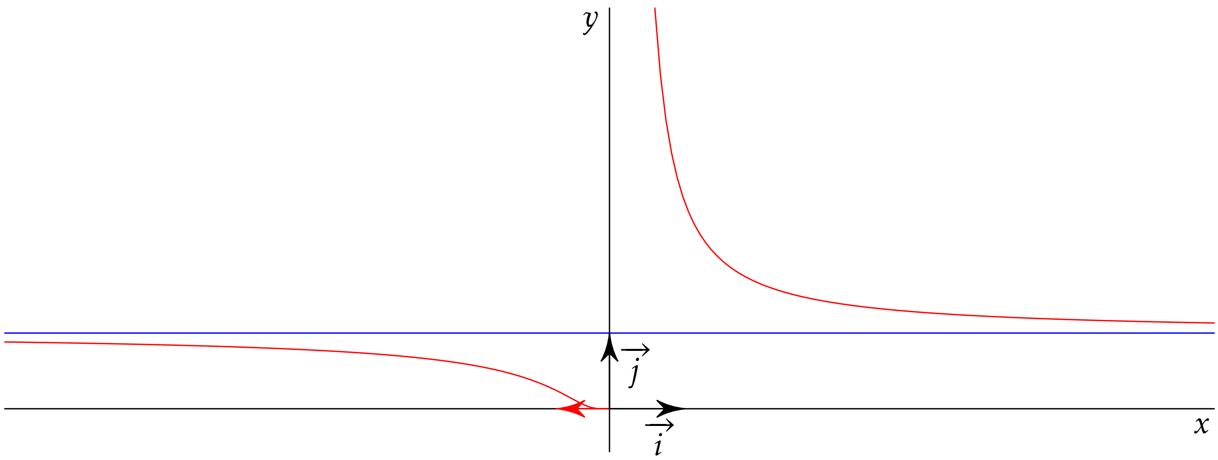
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, , elle n'est donc pas continue et encore moins dérivable !

4 – La limite en $\pm\infty$ de f est 1. On a une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

Le tableau de variation est donc facile à établir :

x	$-\infty$		0	0^+		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	1

5 –



II Étude d'une équation différentielle

1 – Cette équation différentielle est linéaire du premier ordre à coefficients non constants et sans second membre.

$]0,+\infty[$ est un intervalle convenable, et sur cette intervalle, les solutions sont de la forme :

$y = K\,\mathrm{e}^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}} = K\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

2 – L'application $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$,

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\mathrm{d}t$ possède une seule singularité en $+\infty$.

On remarque que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = 0$ par équivalence puis application des croissance comparées.

Donc, pour $t \geqslant t_0$, avec t_0 assez grand : $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$

Comme $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge par Riemann, par comparaison des fonctions positives,

$\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ converge, et donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ converge.

3 – • On pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ pour $x \in]0,+\infty[$ et $t \in [0,+\infty[$.

Pour $x \in [a,b]$ et $t \in [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\right| \leqslant \dfrac{e^{-\frac{t}{b}}}{1+a}$, cette dernière fonction ne dépend pas de x.

De plus, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{b}}}{1+a} dt$ converge, car c'est une exponentielle négative.

On en conclut que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ est continue sur $[a,b]$.

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{x^2} \times \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$

Pour $x \in [a,b]$ et $t \in [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{t}{x^2} \times \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\right| \leqslant \dfrac{t}{a^2} \times \dfrac{e^{-\frac{t}{b}}}{1+t} \leqslant \dfrac{e^{-\frac{t}{b}}}{a^2}$, cette dernière fonction ne dépend pas de x.

De plus, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{b}}}{a^2} dt$ converge, car c'est une exponentielle négative.

On en conclut que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$,

et que $\varphi'(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{x^2} \times \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$.

4 – On a vu que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les intervalles $[a,b]$, avec $0 < a < b$.
La classe $\mathcal{C}^1$ est une propriété locale, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur la réunion de tous les intervalles $[a,b]$, avec $0 < a < b$, c'est à dire sur $]0,+\infty[$.

Et sur cet intervalle, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt$.

On a alors : $x^2\varphi'(x) + \varphi(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{t+1}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt$

$= \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} dt = \left[-x\, e^{-\frac{t}{x}}\right]_{t=0}^{+\infty} = x$

5 – La solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.
Donc, f est solution de $\mathcal{E}_1$ sur $]0,+\infty[$ si et seulement si
il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = K\, e^{\frac{1}{x}} + \varphi(x)$

III Détermination d'une valeur approchée

1 – Pour $t \neq -1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$, par somme des termes d'une suite géométrique.

Ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, t^k\, e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} = \frac{1}{1+t} e^{-\frac{t}{x}}$

Ce résultat est valable dès que $t \neq -1$, donc en particulier pour $t \geqslant 0$.

2 – On pose $h(t) = t^k\, e^{-\frac{t}{x}}$, h est continue donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$.
La seule singularité de l'intégrale est en $+\infty$.
Notons aussi que h est une fonction positive.
$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 h(t) = 0$, par application du théorème des croissances comparées.
Donc, pour $t \geqslant t_0$, avec t_0 assez grand : $0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$

Comme $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge par Riemann, par comparaison des fonctions positives,
$\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$ converge, puis $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\mathrm{d}t$, on pose cette fois ci $h(t) = \dfrac{t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$, la suite de la démonstration est **exactement** la même.

Prenons la somme demandée : $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_{0}^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_{0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle = \int_{0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,t^k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$, par linéarité des intégrales convergentes.

D'où, toujours par linéarité :

$$S = \int_{0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,t^k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1}\,\frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\mathrm{d}t = \varphi(x).$$

On a bien l'égalité demandée.

3 – $\displaystyle I_k(x) = \int_{0}^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$

3.1 – $\displaystyle I_0(x) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t = x$, ce qu'on a déjà calculé.

3.2 – On fait ici une intégration par partie dans une intégrale généralisée en $+\infty$, intégrale dont on a déjà montré la convergence.

On intègre $t \mapsto t^k$ et on dérive $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}$.

Pour continuer, nous avons besoin de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}$ finie. C'est le cas car cette limite est nulle par application du théorème des croissances comparées.

Les deux intégrales qui vont intervenir sont donc de même nature, ici convergentes, et on a l'égalité habituelle :

$$I_k(x) = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\right]_0^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1}\left(\frac{-1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{x(k+1)}\int_{0}^{+\infty} t^{k+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{x(k+1)} I_{k+1}(x)$$

3.3 – On montre cette formule par récurrence.

Vérification initiale

On a déjà calculé : $I_0(x) = x = 0!x^{0+1}$

Hérédité

On admet la propriété au rang k, on la montre au rang $k+1$.

On vérifie bien : $I_{k+1}(x) = x(k+1)\,I_k(x) = x(k+1)\,k!x^{k+1} = (k+1)!x^{(k+1)+1}$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_k(x) = k!x^{k+1}$.

4 – $\displaystyle R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,k!x^{k+1}$

4.1 – En utilisant la valeur des I_k et l'égalité montrée au **III.2**,

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_{0}^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\int_{0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$$

On a : $\displaystyle 0 \leqslant \int_{0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{0}^{+\infty} t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t,$

car les fonctions sont positives et les intégrales, déjà étudiées, convergentes.

On en déduit : $|R_n(x)| \leqslant I_{n+1} = (n+1)!x^{n+2}$.

4.2 – Notons que la suite (u_n) est positive. Nous avons : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{(n+2)!}{10^{n+3}}}{\dfrac{(n+1)!}{10^{n+2}}} = \dfrac{n+2}{10}$.

La suite (u_n) décroit donc strictement jusque $n = 8$, puis $u_9 = u_8$, puis elle croit strictement.

Et on a $u_8 = \dfrac{567}{15625000} \simeq 3,6288 \times 10^{-5}$.

4.3 – On a $\left|R_8\left(\dfrac{1}{10}\right)\right| \leqslant u_8 \leqslant 10^{-4}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} (-1)^k \frac{k!}{10^{k+1}}$ est une valeur approchée de $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$ à 10^{-4} près.

L'énoncé ne demande pas de calcul explicite !

5 – Ce rayon de convergence s'obtient en appliquant le critère de d'Alembert.

Pour $t \neq 0$, on pose $v_k = (-1)^k\, k!t^{k+1}$, alors $\left|\dfrac{v_{k+1}}{v_k}\right| = (k+1)\,|t| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

Le rayon de convergence est donc nul, la série diverge grossièrement partout sauf en 0.

Elle diverge donc en $\dfrac{1}{10}$.

6 – On est dans le cas cité par Henri Poincaré, la série étudiée diverge grossièrement mais les huit premiers termes décroissent rapidement...

IV Un peu d'algorithmique

1 – La valeur *calculée*, et non pas affichée, sera $(-1)^8\,\dfrac{8!}{10^9}$.

La valeur *affichée* sera $\dfrac{63}{1562500}$ si on est en *calcul exact* ou $4,032000000 \times 10^{-4}$ si on est en *calcul approché*, ce qui est le cas ici en utilisant Maple, puisqu'on démarre avec $u = 0.1$...

2 – En Maple, en prenant un paramètres n, cela donne par exemple :

```
CCPval:=proc(n)
local u,k;
u:=0.1;
for k from 1 to n do
   u:=-k*u/10
od;
u
end;
```

Le calcul, dans notre cas, se fait par : `CCPval(8) ;`

3 – En Maple, en prenant un paramètres n, le calcul de S donne par exemple :

```
CCPsom:=proc(n)
local u,k,S;
u:=0.1;S:=0.1;
for k from 1 to n do
   u:=-k*u/10;
   S:=S+u
od;
S
end;
```

Le calcul, dans notre cas, se fait par : `CCPsom(8) ;`