

X-ENS 2016

Un corrigé

Préliminaire

1. Notons s_i, r_i les signes sur la diagonale de S, R .

(a) On a

$$(Sx|Rx) = \sum_{i=1}^n s_i r_i x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

puisque $s_i r_i \leq 1$ et que l'on multiplie cette inégalité par $x_i y_i \geq 0$. $x_i y_i (1 - s_i r_i)$ étant positif, la somme de ces quantités n'est nulle que si elle sont toutes nulles. Comme $x_i y_i \neq 0$, ceci équivaut à $\forall i, r_i s_i = 1$. Comme les r_i, s_i sont des signes, ceci équivaut à $\forall i, r_i = s_i$ et donc à $R = S$.

On a donc $(Sx|Rx) \leq (x|y)$ avec égalité ssi $S = R$.

(b) Supposons avoir deux couples $(x, S), (y, R)$ convenables dans le théorème de Broyden. On a alors

$$(Sx|Rx) = (Ox|Oy) = (x|y)$$

car O est orthogonale. Comme $x, y > 0$, la question précédente indique que $S = R$.

(c) Par bilinéarité du produit scalaire,

$$\|Sx + Ry\|^2 = (Sx|Sx) + 2(Sx|Rx) + (Ry|Rx)$$

Avec 1.a (utilisée trois fois), on en déduit que

$$\|Sx + Ry\|^2 \leq (x|x) + 2(x|y) + (y|y) = \|x + y\|^2$$

Il y a égalité quand on a trois cas d'égalité dans 1.a, c'est à dire quand $S = S, R = S$ et $R = R$, c'est à dire quand $S = R$.

On a ainsi montré que $\|Sx + Ry\| \leq \|x + y\|$ avec égalité quand $R = S$.

2. L'énoncé est plus que mal rédigé puisque la condition (*) ne dépend pas de S alors que l'existence de x tel que $Ox = Sx$ est dépendant de S . Je propose de le comprendre de la manière suivante : si O est une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$ et si $x > 0$ alors il est équivalent de dire

- i. il existe une matrice diagonale de signe S telle que $Ox = Sx$;
- ii. $(I_n + O)x \geq 0$ et $(I_n - O)x \geq 0$.

On procède en deux temps.

- Supposons i. vérifiée. On a alors $(I_n + O)x = (I_n + S)x$ et $(I_n - O)x = (I_n - S)x$. Comme $I_n - S$ et $I_n + S$ sont positive et comme x est positif, on a $(I_n + O)x \geq 0$ et $(I_n - O)x \geq 0$ (chaque coordonnée est somme de termes positifs). Pour ce sens, seule l'hypothèse $x \geq 0$ sert (pas besoin de $x > 0$).
- Supposons ii. vérifiée. Notons alors $y = Ox$. Par hypothèse, on a pour tout $i, x_i + y_i \geq 0$ et $x_i - y_i \geq 0$. Pour tout i, x_i est ainsi plus grand que y_i et que $-y_i$ et donc $|y_i| \leq x_i$ (x_i est forcément positif). Mais comme O est orthogonale, on sait aussi que $y_1^2 + \dots + y_n^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Si l'une des inégalité $|y_i| \leq x_i$ est stricte, on obtient alors une contradiction ce qui justifie par l'absurde que $\forall i, |y_i| = x_i$. En posant $s_i = 1$ si $x_i = y_i$ et $s_i = -1$ sinon, on a alors $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ qui est une matrice diagonale de signes telle que $Sx = Ox$. On notera que l'on n'a pas besoin de l'hypothèse $x > 0$ (ni même $x \geq 0$) dans ce sens.

A. Le cas $n = 2$.

3. Distinguons les cas selon la droite de réflexion.

- Si cette droite est l'axe des abscisses, alors on a $O(1, 0) = (1, 0)$ et $O(0, 1) = (0, -1)$ et donc $O(1, 1) = (1, -1) = \text{diag}(1, -1)(1, 1)$. On peut ainsi choisir $x = (1, 1)$ et $S = \text{diag}(1, -1)$.
- De même, si cette droite est l'axe des ordonnées, on peut choisir $x = (1, 1)$ et $S = \text{diag}(-1, 1)$.
- Sinon on a $v^+ = (a, b)$ avec $a, b \neq 0$. Quitte à prendre le vecteur opposé (qui dirige aussi la droite), on peut supposer que $a > 0$. Si $b > 0$ alors on peut choisir $x = (a, b)$ et $S = I_2$. Sinon, $b < 0$ (b n'est pas nul) et on peut choisir $x = (-b, a)$ et $S = -I_2$ (un vecteur orthogonal à v^+ est envoyé sur son opposé).

4. Un vecteur et son image forment un angle θ . On voit graphiquement qu'en s'arrangeant pour que la bissectrice soit l'un des axes coordonné, on aura la propriété voulue. On pose donc

$$x_+ = r_{-\theta/2}(1, 0) = (\cos(-\theta/2), \sin(-\theta/2)) \text{ et } x_- = r_{-\theta/2}(0, 1) = (\cos(\pi/2 - \theta/2), \sin(\pi/2 - \theta/2))$$

par construction, on a

$$Ox_+ = r_{\theta/2}(1, 0) = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)) = \text{diag}(1, -1)x_+$$

$$Ox_- = r_{\theta/2}(0, 1) = (\cos(\pi/2 + \theta/2), \sin(\pi/2 + \theta/2)) = \text{diag}(-1, 1)x_-$$

- Si $\theta \in]0, \pi[$ alors $(\pi - \theta)/2$ est dans $]0, \pi/2[$ et $x^- > 0$.
- Si $\theta \in]-\pi, 0[$ alors $-\theta/2 \in]0, \pi/2[$ et $x^+ > 0$.
- Si $\theta = \pi$ alors O est en fait égale à $-I_2$. On peut alors choisir $x = (1, 1)$ et $S = -I_2$.

B. Le théorème de Tucker

5. On se donne O orthogonale d'ordre n . La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n + O \\ 0 & 0 & I_n - O \\ -(I_n + {}^tO) & -(I_n - {}^tO) & 0 \end{pmatrix}$

est alors antisymétrique. Le théorème de Tucker nous donne alors un vecteur $u \in \mathbb{R}^{3n}$. Ecrivons u avec trois blocs u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^n$. On a alors

$$Mu = \begin{pmatrix} (I_n + O)u_3 \\ (I_n - O)u_3 \\ -(I_n + {}^tO)u_1 - (I_n - {}^tO)u_2 \end{pmatrix}$$

$$u + MU = \begin{pmatrix} u_1 + (I_n + O)u_3 \\ u_2 + (I_n - O)u_3 \\ u_3 - (I_n + {}^tO)u_1 - (I_n - {}^tO)u_2 \end{pmatrix}$$

Comme $Mu \geq 0$ et $u + Mu > 0$, il suffit de choisir

$$x = u_3, \quad z_1 = u_1, \quad z_2 = u_3$$

qui sont positifs par hypothèse (partie du résultat du théorème de Tucker).

6. Remarquons que

$$-(I_n + {}^tO)z_1 - (I_n - {}^tO)z_2 = {}^tO(z_2 - z_1) - (z_2 + z_1)$$

La troisième des relations précédentes donne donc

$${}^tO(z_2 - z_1) \geq (z_2 + z_1) \quad (*)$$

Comme tO est orthogonale, $(z_2 - z_1)$ et ${}^tO(z_2 - z_1)$ ont même norme. De plus $y_1 \geq y_2$ et $y_2 \geq 0$ entraîne $\|y_1\| \geq \|y_2\|$ (il suffit d'écrire le carré de la norme comme somme des carrés des coordonnées) et on a donc

$$\|z_1 - z_2\| \geq \|z_1 + z_2\|$$

En élevant au carré, on trouve alors que $(z_1|z_2) \leq 0$. Comme les vecteurs sont à coordonnées positives, cela entraîne $(z_1|z_2) = 0$ puis

$$\|z_1 - z_2\| = \|z_1 + z_2\|$$

De même, si on a inégalité stricte dans (*), on va trouver $\|z_1 - z_2\| > \|z_1 + z_2\|$ ce qui est faux. (*) est donc une égalité.

7. La dernière relation de la question 5 donne maintenant $x > 0$ (l'autre terme est nul, on vient de le montrer). Les relations $x + Ox \geq 0$ et $x - Ox \geq 0$ sont les deux premières de la question 5. Il reste à utiliser la question 2 pour conclure.

8. Il suffit de montrer que -1 n'est pas valeur propre de M . Soit donc x un vecteur tel que $Mx = -x$. On a

$$\|x\|^2 = (x|x) = -(Mx|x) = -({}^t(Mx)x) = -{}^t x {}^t Mx = {}^t x Mx = (x|Mx) = -(x|x) = -\|x\|^2$$

Il en résulte que $\|x\| = 0$. $\ker(M + I_n)$ est donc réduit à $\{0\}$ et $M + I_n$ est inversible.

9. Les opérations de transposition et de passage à l'inverse commutent et donc $I_n - M = {}^t(I_n + M)$ est inversible. De plus

$${}^tOO = (I_n + M)(I_n - M)^{-1}(I_n + M)^{-1}(I_n - M)$$

Comme $I_n + M$ et $I_n - M$ commutent, il en est de même de leurs inverses et donc

$${}^tOO = (I_n + M)(I_n + M)^{-1}(I_n - M)^{-1}(I_n - M) = I_n$$

Ceci montre que O est orthogonale.

10. Le théorème de Broyden donne l'existence de $x > 0$ et de S matrice diagonale de signes tels que $Ox = Sx$. Posons $u = x + Sx = (I + O)x$. La question 2 montre que $u \geq 0$. On a aussi

$$\begin{aligned} Mu &= Mx + MOx \\ &= Mx + (M + I_n - I_n)(I_n + M)^{-1}(I_n - M)x \\ &= Mx + (I_n - M)x - (I_n + M)^{-1}(I_n - M)x \\ &= x - Ox \end{aligned}$$

La question 2 montre aussi que $Mu \geq 0$. Enfin, la relation précédente donne

$$Mu + u = x > 0$$

Le vecteur u convient pour prouver le théorème de Tucker.

C. Preuve du théorème de Broyden

11. O étant orthogonale, ses colonnes sont de norme 1 ainsi que ses lignes (la transposée d'une matrice orthogonale est orthogonale). En regardant dernière ligne et dernière colonne, on obtient

$$\|r\|^2 + \alpha^2 = \|q\|^2 + \alpha^2 = 1$$

Ainsi, $|\alpha| \leq 1$ et il n'y a égalité que si $q = r = 0$.

12. Supposons $|\alpha| = 1$. On a alors $I_n = {}^tOO = \begin{pmatrix} {}^tPP & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et P est ainsi orthogonale. On peut trouver $y > 0$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $S_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ matrice diagonale de signes tels que $Py = S_1y$. Si on note $x \in \mathbb{R}^n$ obtenu à partir de y en ajoutant une coordonnée égale à 1 et si on pose $S = \text{diag}(S_1, 1)$, on a $Ox = Sx$, $x > 0$ et S matrice diagonale de signes.

13. Un calcul par blocs donne

$$I_n = {}^tOO = \begin{pmatrix} {}^tPP + q^tq & {}^tPr + q\alpha \\ {}^trP + \alpha^tq & {}^trr + \alpha^2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors les relations demandée en remarquant que α étant un scalaire, on a $q\alpha = \alpha q$.

14. On a alors (on pense à transposer la seconde relation de la question précédente et on remarque que trr est un scalaire que l'on peut déplacer dans le produit)

$$\begin{aligned} {}^tQ_-Q_- &= \left({}^tP - \frac{q^tr}{\alpha - 1} \right) \left(P - \frac{r^tq}{\alpha - 1} \right) \\ &= {}^tPP - \frac{1}{\alpha - 1} (q^trP + {}^tPr^tq) + \frac{q^trr^tq}{(\alpha - 1)^2} \\ &= (I_{n-1} - q^tq) - \frac{1}{\alpha - 1} (-\alpha q^tq - \alpha q^tq) + \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} q^tq \\ &= I_{n-1} \end{aligned}$$

La dernière égalité est une vérification de nullité du coefficient devant la matrice q^tq .

Le calcul est en tout point semblable pour Q_+ . Nos deux matrices sont ainsi bien orthogonales.

15. On a cette fois

$$\begin{aligned} {}^tQ_+Q_- &= \left({}^tP - \frac{q^tr}{\alpha + 1} \right) \left(P - \frac{r^tq}{\alpha - 1} \right) \\ &= {}^tPP - \frac{1}{\alpha + 1} q^trP - \frac{1}{\alpha - 1} {}^tPr^tq + \frac{q^trr^tq}{\alpha^2 - 1} \\ &= (I_{n-1} - q^tq) + \frac{\alpha}{\alpha + 1} q^tq + \frac{\alpha}{\alpha - 1} q^tq - q^tq \\ &= I_{n-1} - \frac{2}{1 - \alpha^2} q^tq \end{aligned}$$

On multiplie cette relation par Q_+ et comme Q_+ est orthogonale, on obtient

$$Q_- = Q_+ - \frac{2}{1 - \alpha^2} Q_+ q^tq$$

16. On remplace Q_- par son expression en fonction de Q_+ :

$$\begin{aligned} (S_+x_+ | S_-x_-) &= (Q_+x_+ | Q_-x_-) \\ &= (Q_+x_+ | Q_+x_- - \frac{2}{1 - \alpha^2} Q_+ q^tq x_-) \\ &= (Q_+x_+ | Q_+x_-) - \frac{2}{1 - \alpha^2} (Q_+x_+ | Q_+ q^tq x_-) \end{aligned}$$

Q_+ étant orthogonale, elle conserv le produit scalaire et ainsi

$$(S_+x_+ | S_-x_-) = (x_+ | x_-) - \frac{2}{1 - \alpha^2} (x_+ | q^tq x_-)$$

Pour conclure, on remarque que

$$(x_+|q^t q x_-) = {}^t x_+ q^t q x_- = (x_+|q)(q|x_-)$$

ce qui donne finalement (symétrie du produit scalaire)

$$(S_+ x_+ | S_- x_-) = (x_+ | x_-) - \frac{2}{1 - \alpha^2} (x_+ | q)(x_- | q)$$

17. Un calcul par blocs donne

$$O z_+ = \begin{pmatrix} P x_+ + r \eta_+ \\ {}^t q x_+ + \alpha \eta_+ \end{pmatrix}$$

Avec la définition de Q_+ on a

$$Q_+ x_+ = P x_+ - \frac{r {}^t q x_+}{\alpha + 1} = P x_+ - \frac{(q|x_+)}{\alpha + 1} r = P x_+ + \eta_+ r$$

et on a aussi

$${}^t q x_+ + \alpha \eta_+ = (q|x_+) + \alpha \eta_+ = -(\alpha + 1)\eta_+ + \alpha \eta_+ = -\eta_+$$

en sorte que

$$O z_+ = \begin{pmatrix} Q_+ x_+ \\ -\eta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_+ x_+ \\ -\eta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z_+$$

De même,

$$O z_- = \begin{pmatrix} Q_- x_- \\ \eta_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_- x_- \\ \eta_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_- & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_-$$

ATTENTION : on ne trouve pas les mêmes matrices que dans l'énoncé.

Pour conclure dans ce cas, il nous suffit de montrer que z_+ ou z_- est > 0 . Pour cela, comme x_+, x_- sont > 0 , il suffit de montrer que η_+ ou η_- est > 0 .

On se place dans le cas où $S_+ \neq S_-$ et la question 1.a indique que

$$(S_+ x_+ | S_- x_-) < (x_+ | x_-)$$

La question 16 indique ainsi que

$$\eta_+ \eta_- = -\frac{2}{1 - \alpha^2} (x_+ | q)(x_- | q) = (S_+ x_+ | S_- x_-) - (x_+ | x_-) < 0$$

η_+ et η_- sont ainsi non nuls et de signes opposés. L'un des deux est > 0 et on peut conclure dans ce cas.

REMARQUE : sans l'hypothèse $S_+ \neq S_-$ on obtient seulement que $\eta_+ \eta_- \leq 0$.

18. (a) Le même calcul qu'en question précédente (cas $\eta_+ = 0$) donne

$$O z = \begin{pmatrix} S_+ x_+ \\ 0 \end{pmatrix} = R_+ z = R_- z$$

(b) On pose cette fois

$$Q'_+ = P' - \frac{r'^t q'}{\alpha' + 1} \quad \text{et} \quad Q'_- = P' - \frac{r'^t(q')}{\alpha' - 1}$$

Comme O est orthogonale, un produit par blocs donne

$$(\alpha')^2 + {}^t r' r' = 1, \quad q'^t q' + {}^t P' P' = I_{n-1}, \quad {}^t P' r' + \alpha' q' = 0$$

On vérifie que Q'_+ et Q'_- sont orthogonales etc. On fait ainsi les mêmes calculs qu'avant

pour obtenir deux vecteurs $z'_+ = \begin{pmatrix} \eta'_+ \\ x'_+ \end{pmatrix}$ et $z'_- = \begin{pmatrix} \eta'_- \\ x'_- \end{pmatrix}$ avec x'_- et x'_+ qui sont > 0 et

$\eta'_+ \eta'_- \leq 0$. L'une des deux η'_+ ou η'_- est positif ce qui nous donne un bon $z' = \begin{pmatrix} \eta' \\ x' \end{pmatrix}$ avec $x' > 0$, $\eta' \geq 0$ et $O z' = R' z'$ pour une bonne matrice diagonale de signes.

- (c) Si $\eta' > 0$, on a terminé car z' convient dans le théorème. Sinon, a en fait deux matrices R' convenables car le premier coefficients est indifférents (comme en 18.a). Notons alors R'_+ et R'_- ces matrices. Pour $R \in \{R_+, R_-\}$, et $R' \in \{R'_+, R'_-\}$, on a $O(z' + z) = Oz' + Oz = Rz + R'z'$ et comme O est orthogonale (et conserve donc la norme)

$$\|z' + z\| = \|Rz + R'z'\|$$

En reprenant le raisonnement de la question 1, on voit que les coefficients de R et R' sont tous égaux sauf éventuellement le premier et le dernier (car toutes les coordonnées intermédiaires de z et z' sont > 0). Mais on peut choisir comme on veut le signe en bas de R et celui en haut de R' . On peut donc s'arranger pour que $R = R'$. On a alors $O(z + z') = R(z + z')$ et $z + z' > 0$ car $n \geq 2$ (les seuls 0 sur z et z' sont en des positions différentes).

D. Lemme de Farkas

Un calcul par blocs donne

$$By = \begin{pmatrix} Ax - bt \\ -Ax + bt \\ -{}^tA(z_1 - z_2) \\ {}^tb(z_1 - z_2) \end{pmatrix}$$

19. Dans le cas où $t = 0$ et en posant $z = z_1 - z_2$, on a donc

$$By = \begin{pmatrix} Ax \\ -Ax \\ -{}^tAz \\ {}^tbz \end{pmatrix}$$

Ce vecteur étant positif, on a $-{}^tAz \geq 0$ et $(b|z) = {}^tbz \geq 0$. De plus

$$By + y = \begin{pmatrix} Ax + z_1 \\ -Ax + z_2 \\ -{}^tAz + x \\ {}^tbz \end{pmatrix}$$

Ce vecteur étant > 0 on a donc même $(b|z) = {}^tbz \geq 0$.

20. On suppose maintenant $t > 0$. Comme $By \geq 0$, les vecteurs $Ax - bt$ et $-Ax + bt$ ont des coordonnées positives. Comme elles sont opposées, ce vecteur est nul et donc

$$Ax = tb$$

Dans la question 19, on est dans le cas (II) du lemme et ici on est dans le cas (I) (avec $z = x/t$ qui est positif). Enfin, il faut montrer que les situations (I) et (II) sont incompatibles. Supposons donc avoir $Ax_0 = b$ avec $x_0 \geq 0$ et z_0 tel que $-{}^tAz_0 \geq 0$ et $(b|z_0) > 0$. On a alors

$$(x_0|{}^tAz_0) = (Ax_0|z_0) = (b|z_0) > 0$$

Mais $(x_0|{}^tAz_0)$ est négatif car produit scalaire d'un vecteur positif et d'un autre négatif ce qui est contradictoire.