Centrale TSI 2011 - Mathématiques 2

I Préliminaires - endomorphismes nilpotents, trace d'un endomorphisme

I. A. 1) $$\begin{aligned} 0 \in \mathrm{Sp}(f) &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\}\,,\ f(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \ker f \neq \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow f \text{ non injective.} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f \text{ injective.}}$$

2) Comme E est dimension finie, f est injective si et seulement si f est bijective. Donc :

$$\boxed{0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f \in GL(E).}$$

3) Moyennant l'identification rappelée entre $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL(E)$, M est inversible si et seulement si l'endomorphisme f, de matrice M dans la base $\mathcal{B}$, est inversible, ce qui équivaut à $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ ou encore $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$. Donc :

$$\boxed{M \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{Sp}(M).}$$

B. 1) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Donc :

$$\boxed{k(N) = 3.}$$

2) a) Comme M est semblable à N, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = P^{-1}NP$.
On a alors $\forall p \in \mathbb{N},\ M^p = (P^{-1}NP)^p = P^{-1}N^pP$. Donc :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ M^p \text{ et } N^p \text{ sont semblables.}}$$

b) Si N est nilpotente et M est semblable à N, sous les notations précédentes, $\forall p \in \mathbb{N},\ M^p = P^{-1}N^pP$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ M^p = 0 \Leftrightarrow N^p = 0$. On en déduit que :

$$\boxed{M \text{ est nilpotente et } k(M) = k(N).}$$

3) Notons $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, P est inversible, $M = P^{-1}NP$ et les matrices M et N sont semblables, donc :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \text{ est également nilpotente et de même indice de nilpotence que } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).}$$

4) a) Soient i et $j \in [\![1, n]\!]$ tels que $j \leq i + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} n_{ij}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{n} n_{ik}n_{kj} \\ &= \sum_{k=i+1}^{n} n_{ik}n_{kj} \text{ car } k \leq i \Rightarrow n_{ik} = 0 \\ &= 0 \text{ car } \left\{ \begin{array}{c} i+1 \leq k \\ j \leq i+1 \end{array} \right\} \Rightarrow j \leq k \text{ et } n_{kj} = 0 \end{aligned}$$

Donc en particulier, $\underline{N^2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \text{ et } n_{ij}^{(2)} = 0 \text{ si } j \leq i+1.}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que, si $j \leq i+k-1$, $n_{ij}^{(k)} = 0$. Cela est vrai pour $k = 0$ ($N^k = I_n$), 1 et 2.
Supposons la propriété vraie au rang k.
On a alors : $n_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} n_{il}^{(k)} n_{lj}$.
- Si $i+k > n$, pour tout $l \in [\![1,n]\!]$, $l \leq i+k-1$ et $n_{ij}^{(k)} = 0$, donc $n_{ij}^{(k+1)} = 0$.
- Si $i+k \leq n$, $n_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=i+k}^{n} n_{il}^{(k)} n_{lj}$ car pour $l \leq i+k-1$, $n_{il}^{(k)} = 0$.
Or pour $i+k \leq l$ et $j \leq i+k$, l'on a $j \leq l$ et $n_{lj} = 0$. D'où $n_{ij}^{(k+1)} = 0$.
La propriété est donc vraie au rang $k+1$ et
en particulier, $\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ N^k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \text{ et } n_{ij}^{(k)} = 0 \text{ si } j \leq i+k-1}$.

c) Pour $k = n$, $\forall i, j \in [\![1,n]\!]$, $i+k-1 = i+n-1 \geq n$ et $j \leq i+k-1$. Donc $n_{ij}^{(n)} = 0$, ce qui montre :

$$\boxed{N^n = 0 \text{ et } N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})}$$

5) a) $\chi_f(X) = \chi_N(X) = \prod_{i=1}^{n} (n_{ii} - X)$. Donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{n_{ii} / i \in [\![1,n]\!]\}}$$

b) Comme χ_f est scindé, il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.
- L'on a vu en I.B.4.c) que si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $n_{ii} = 0$, c'est-à-dire si 0 est la seule valeur propre de N, $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et f est nilpotent.
- Réciproquement, si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et λ est valeur propre de N, il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $NX = \lambda X$. En outre, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$.
On a alors $N^k X = \lambda^k X = 0$; d'où $\lambda = 0$.
Comme les valeurs propres de f sont celles de N, j'ai montré :

$$\boxed{f \ \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) = \{0\}}$$

6) Soit $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$. D'après I.B.5.b), N est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$.
Comme d'après I.B.5.a), $\mathrm{Sp}(N) = \{n_{ii} / i \in [\![1,n]\!]\}$,

$$\boxed{N \ \text{ est nilpotente} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ n_{ii} = 0.}$$

C. 1) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
On a alors $N = P^{-1}MP$ et $\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(MPP^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$
(car $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
Donc, $\underline{\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \text{ est indépendant de } \mathcal{B}}$.

2) L'on sait qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.
On a alors $\mathrm{Sp}(f) = \{n_{kk} / k \in [\![1,n]\!]\} = \{\lambda_k / k \in [\![1,n]\!]\}$. Donc :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} n_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.}$$

3) Comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$, A admet deux valeurs propres opposées.

- Si elles sont non nulles, elles sont distinctes et A est diagonalisable.

- Si elles sont nulles, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure B dont la diagonale est formée des valeurs propres de A et ne contient donc que des 0.

D'après la question I.B.4., B est nilpotente et d'après I.B.2.b), A l'est aussi.

J'ai montré :

$$\boxed{A \text{ est soit diagonalisable, soit nilpotente.}}$$

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

A n'est pas nilpotente puisque quelle est triangulaire supérieure et que l'un des coefficients diagonaux est non nul.

Ses valeurs propres sont 1 et -2.

Son sous-espace propre $E_1(A)$ associé à la valeur propre 1 a pour équation : $\begin{cases} y = 0 \\ -3z = 0 \end{cases}$.

Il est de dimension 1 alors que la valeur propre est d'ordre de multiplicité 2. Donc A n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\text{Lorsque } n = 3, \text{ il existe des matrices ni diagonalisables, ni nilpotentes.}}$$

II Exponentielle d'un endomorphisme

II. A. 1) a) $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}}$

b)
$$\begin{aligned} \det(\exp(f)) &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\exp(f) \in GL(E).}$

2) Soit f l'endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bases de E telles que les matrices de passages respectives de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_2$ soient P_1 et P_2.

Alors, comme $M = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et $M = P_2 D_2 P_2^{-1}$, l'on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = D_1$, respectivement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = D_2$; ces matrices étant diagonales, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de vecteurs propres de f.

D'où, d'après la définition de $\exp(f)$,

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\exp(f)) = \exp(D_1)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\exp(f)) = \exp(D_2)$, ce qui prouve :

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = P_1 \exp(D_1) P_1^{-1} = P_2 \exp(D_2) P_2^{-1}$. Donc :

$$\boxed{P_1(\exp D_1)P_1^{-1} = P_2 \exp(D_2) P_2^{-1}.}$$

B. 1) D'après la question I.B.4.a), M^k est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont nuls pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. D'où les termes diagonaux de $\sum_{p=0}^{k(f)-1} \dfrac{M^p}{p!}$ sont ceux de $\dfrac{M^0}{0!} = I_n$.
Les termes diagonaux de $\exp(M)$ sont donc tous égaux à 1.

2) Les valeurs propres de $\exp(f)$ sont celles de sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, égale à $\exp(M)$. Or $\exp(M)$ est triangulaire supérieure et ses valeurs propres sont les coefficients de sa diagonale ; d'où :
Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\exp f) = \{1\} \text{ (valeur propre d'ordre } n).}$
Comme $\det(\exp(f)) = 1$ (produit des termes de la diagonale), $\boxed{\exp(f) \in GL(E).}$

C. 1) a) Soit x vecteur propre de d associé à la valeur propre λ.
Montrons que $\exp(d)(x) = e^{\lambda} x$.
x peut se compléter en une base $(x, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de d ; donc par définition (indépendante de la base de vecteurs propres de d), $\exp(d)(x) = e^{\lambda} x$.
Soit donc $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de d associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
L'on a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\begin{aligned} d \circ g(e_i) &= g \circ d(e_i) \\ &= g(\lambda_i e_i) \\ &= \lambda_i g(e_i) \end{aligned}$
D'où soit $g(e_i) = 0_E$ ou $g(e_i)$ est vecteur propre de d associé à la valeur propre λ_i.
On a alors $\exp(d) \circ g(e_i) = \begin{cases} 0_E \text{ si } g(e_i) = 0_E \\ \exp(\lambda_i) g(e_i) \text{ sinon} \end{cases}$
Donc dans les deux cas $\exp(d) \circ g(e_i) = \exp(\lambda_i) g(e_i)$.
De même $\begin{aligned} g \circ \exp(d)(e_i) &= g(\exp(\lambda_i) e_i) \\ &= \exp(\lambda_i) g(e_i). \end{aligned}$
$g \circ \exp(d)$ et $\exp(d) \circ g$ prennent les mêmes valeurs sur une base de E : ils sont donc égaux.
On en déduit, par une récurrence simple sur $p \in \mathbb{N}$ que :
$\forall p \in \mathbb{N},\ g^p \circ \exp(d)$ et $\exp(d) \circ g^p$, puis que $\sum_{p=0}^{k(g)} g^p \circ \exp(d) = \sum_{p=0}^{k(g)} \exp(d) \circ g^p$, ce qui équivaut à $\left(\sum_{p=0}^{k(g)} g^p \right) \circ \exp(d) = \exp(d) \circ \left(\sum_{p=0}^{k(g)} g^p \right)$ ou encore à :

$$\boxed{\exp(d) \circ \exp(g) = \exp(g) \circ \exp(d)}$$

b) L'isomorphisme canonique entre $L(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ montre que, d'après l'unicité de la décomposition d'un endomorphisme de $\Gamma_n(E)$ comme somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent que :

$$\boxed{\forall M \in \Gamma_n(\mathbb{C}),\ \exists!(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \text{ tel que } \begin{cases} D \text{ soit diagonalisable,} \\ N \text{ soit nilpotente et} \\ M = D + N \end{cases}}$$

2) Posons $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente. On a alors $PMP^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}$.
PDP^{-1} est diagonalisable car elle est semblable à une matrice diagonale, PNP^{-1} est nilpotente d'après la question I.B.2.b).

Par ailleurs $(PDP^{-1})(PNP^{-1}) = P(DN)P^{-1} = P(ND)^{-1} = (PNP^{-1})(PDP^{-1})$.

Donc $\boxed{PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})}$.

L'on a alors :

$$\begin{aligned}
\exp(PDP^{-1}) &= \exp(PP_1D_1P_1^{-1}P^{-1}) \text{ où } D_1 \text{ est diagonale}\\
&= (PP_1)\exp(D_1)(PP_1)^{-1} \left(\begin{array}{l}\text{définition de l'exponentielle d'un}\\ \text{endomorphisme diagonalisable}\end{array}\right)\\
&= P(P_1\exp(D_1)P_1^{-1})P^{-1}\\
&= P\exp(D)P^{-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\exp(PNP^{-1}) &= \sum_{p=0}^{k(PNP^{-1})} \frac{(PNP^{-1})^p}{p!}\\
&= \sum_{p=0}^{k(N)} \frac{PN^pP^{-1}}{p!} \left(\begin{array}{l}\text{les indices de nilpotence de deux endomorphismes}\\ \text{nilpotents semblables sont égaux}\end{array}\right)\\
&= P\left(\sum_{p=0}^{k(N)} \frac{N^p}{p!}\right)P^{-1}\\
&= P\exp(N)P^{-1}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\exp(PMP^{-1}) &= \exp(PDP^{-1})\exp(PNP^{-1})\\
&= P\exp(D)P^{-1}P\exp(N)P^{-1}\\
&= P\exp(D)\exp(N)P^{-1}\\
&= P\exp(M)P^{-1}
\end{aligned}$$

J'ai montré :

$$\boxed{\exp(PMP^{-1}) = P\exp(M)P^{-1}}$$

III Le cas $n = 2$

III. A. 1) Si les valeurs propres λ et μ de f étaient distinctes, f serait diagonalisable. Comme f est supposé non diagonalisable, $\boxed{\lambda = \mu}$.

Si $\dim E_\lambda = 2$, alors $E_\lambda = E$ et f est une homothétie, diagonalisable. Donc $1 \leq \dim E_\lambda \leq 1$, ce qui prouve $\boxed{\dim E_\lambda = 1}$.

La seule valeur propre de $f - \lambda Id_E$ est donc 0 et d'après I.B.5), $f - \lambda Id_E$ est nilpotent.

Il existe donc une base de E dans laquelle la matrice de $f - \lambda Id_E$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'après la question I.B.5).

Or $M^2 = 0$. Donc :

$$\boxed{(f - \lambda Id_E)^2 = 0}$$

2) Puisque $f(v) \neq \lambda v$, $u \neq 0_E$.

$$\begin{aligned}
f(u) &= f^2(v) - \lambda f(v)\\
&= (2\lambda f - \lambda^2 Id_E)(v) - \lambda f(v) \text{ (car } (f - \lambda Id_E)^2 = 0)\\
&= \lambda f(v) - \lambda^2 v\\
&= \lambda u
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{u \in E_\lambda \setminus \{0_E\}.}$

Soient α et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha u + \beta v = 0_E$ (1). On a alors :

$\alpha f(u) + \beta f(v) = 0_E \Leftrightarrow \alpha\lambda u + \beta f(v) = 0_E$ (2).

Par combinaison linéaire de (1) et (2), on obtient $\lambda\beta v - \beta f(v) = 0_E \Leftrightarrow -\beta u = 0_E$.

D'où $\beta = 0$ et $\alpha = 0$; (u, v) est libre et comme $\dim E = 2$,

$$\boxed{(u, v) \text{ est une base de } E.}$$

On a alors $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = u + \lambda v$ (par définition de u). Donc :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.}$$

B. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Si A est diagonalisable, A est semblable à une matrice du type $D(a, b)$.
Si A n'est pas diagonalisable, soit (e_1, e_2) une base de E et f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base (e_1, e_2). Comme A n'est pas diagonalisable, f ne l'est pas et d'après la question III.A., il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle f admet une matrice du type $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = M(\lambda)$. Donc A est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$. On a montré :

$$\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de } J_2(\mathbb{C}).}$$

C. $\forall a, b \in \mathbb{C},\ D(a, b) = D(a, b) + N$ avec $N = 0$, donc N est nilpotente : $D(a, b) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$.
$\forall a \in \mathbb{C},\ M(a) = aI_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors aI_2 est diagonale et $N^2 = 0$, donc N est nilpotente ; enfin $(aI_2)N = N(aI_2) = aN$: $M(a) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$. D'où :

$$\boxed{J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C}).}$$

$\boxed{\exp(D(a, b)) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}}$ par définition de l'exponentielle d'une matrice diagonale.

$$\begin{aligned}
\exp(M(a)) &= \exp(aI_2) \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\exp(M(a)) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}}$

D. On a bien sur $\Gamma_2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Inversement, soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. M est alors semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$, donc de $\Gamma_2(\mathbb{C})$. D'où d'après II.C.2), $M \in \Gamma_2(\mathbb{C})$. D'où :

$$\boxed{\Gamma_2(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

E. 1) Le polynôme caractéristique de $A(\theta)$ est $\chi_{A(\theta)} = X^2 + \theta^2$ et $\mathrm{Sp}(A(\theta)) = \{i\theta, -i\theta\}$.
Ses deux valeurs propres étant distinctes, $A(\theta)$ est diagonalisable. Ses deux sous-espaces propres sont :
- $E_{i\theta}(A(\theta))$ d'équation $-i\theta x - \theta y = 0 \Leftrightarrow y = -ix$, d'où $E_{i\theta}(A(\theta)) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$

- $E_{i\theta}(A(\theta)) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}$

D'où $A(\theta) = P\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned}
\exp(A(\theta)) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ -ie^{i\theta} & ie^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2i\cos\theta & -2i\sin\theta \\ 2i\sin\theta & 2\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\exp(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.}$$

2) L'on a alors $\exp(A(0)) = \exp(A(2\pi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $A(0) \neq A(2\pi)$, exp n'est pas injective.

3) Une matrice M de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est de la forme $D(a,b)$ avec $ab \neq 0$ ou $M(a)$ avec $a \neq 0$.

- Si M est de la forme $D(a,b)$; posons $a = |a|e^{i\alpha}$ et $b = |b|e^{i\beta}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a alors}\quad M &= \begin{pmatrix} \exp(\ln(|a| + i\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(\ln(|b| + i\beta) \end{pmatrix} \\
&= \exp\begin{pmatrix} \ln(|a|) + i\alpha & 0 \\ 0 & \ln(|b|) + i\beta \end{pmatrix} \\
&= \exp(D(\ln(|a|) + i\alpha, \ln(|b|) + i\beta)).
\end{aligned}$$

- Si M est de la forme $M(a)$; posons $a = |a|e^{i\alpha}$.

On a alors $M = \begin{pmatrix} \exp(\ln(|a| + i\alpha) & 1 \\ 0 & \exp(\ln(|a| + i\alpha) \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 1 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}$.

Or la matrice $\begin{pmatrix} \exp(\lambda) & \exp(\lambda) \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable et l'on a vu III.B. que cette matrice est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 1 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}$.

Donc M est semblable à $\begin{pmatrix} \exp(\lambda) & \exp(\lambda) \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \exp(M(\lambda))$.

J'ai montré :

$$\boxed{\text{Tout élément de } J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à l'exponentielle d'un élément de } J_2(\mathbb{C}).}$$

4) Soit $M \in GL_2(\mathbb{C})$; d'après la question III.B., il existe $P_1 \in GL_2(\mathbb{C})$ et $M_1 \in J_2(\mathbb{C})$ telle que $M = P_1M_1P_1^{-1}$. Comme M est inversible, M_1 l'est aussi et $M_1 \in J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$.

D'après la question III.E.2), il existe $P_2 \in GL_2(\mathbb{C})$ et $M_2 \in J_2(\mathbb{C})$ telle que

$$M_1 = P_2\exp(M_2)P_2^{-1}.$$

D'où $M = (P_1P_2)\exp(M_2)(P_1P_2)^{-1} = P\exp(M_2)P^{-1}$ en posant $P = P_1P_2$, matrice inversible.

$M_2 \in \Gamma_2(\mathbb{C})$: d'après II.C.2), $PM_2P^{-1} \in \Gamma_2(\mathbb{C})$ et $P(\exp M_2)P^{-1} = \exp(PM_2P^{-1})$.
D'où $M = \exp(PM_2P^{-1})$ et

$$\boxed{\exp : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to GL_2(\mathbb{C}) \text{ est surjective.}}$$

F. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; alors M est semblable à une matrice M_1 de $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$.
Si M_1 est de la forme $D(a,b)$, $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M_1) = a+b$; $\exp(M)$ est semblable à $D(e^a, e^b)$; donc $\det(\exp(M)) = e^{a+b} = \exp(\mathrm{Tr}(M))$.
Si M_1 est de la forme $M(a)$, $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M_1) = 2a$; $\exp(M)$ est semblable d'après II.C.2) à $\exp(M_1) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$; donc $\det(\exp(M)) = e^{2a} = \exp(\mathrm{Tr}(M))$.
J'ai montré :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{Tr}(M)).}$$

G. 1) - Les matrices de $SL_2(\mathbb{C})$ sont de déterminant non nul, donc inversibles.
- $SL_2(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ car $I_2 \in SL_2(\mathbb{C})$
- Si M_1 et $M_2 \in SL_2(\mathbb{C})$, $\det(M_1M_2) = \det(M_1)\det(M_2) = 1$ et $SL_2(\mathbb{C})$ est stable pour la multiplication des matrices.
- Si $M \in SL_2(\mathbb{C})$, $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1} = 1$ et $M^{-1} \in SL_2(\mathbb{C})$.
Donc $\underline{SL_2(\mathbb{C}) \text{ est un sous-groupe de } GL_2(\mathbb{C})}$.
Si $\underline{M \in L_0(\mathbb{C})}$, $\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{Tr}(M)) = 1$, donc $\underline{\exp(M) \in SL_2(\mathbb{C})}$.

2) Soit $M \in L_0(\mathbb{C})$; d'après I.C.3), M est soit diagonalisable, soit nilpotente.
- si elle est diagonalisable, elle est semblable à une matrice $D(a,b)$ de même trace, qui vérifie donc $b = -a$.
- si elle est nilpotente et non diagonalisable, elle est semblable d'après la question III.B. à une matrice du type $M(a)$ de trace nulle, qui vérifie donc $a = 0$.
D'où :

$$\boxed{\text{Tout élément de } L_0(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice du type } D(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{C} \text{ ou } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3) $\det N' = 1$: $\boxed{N' \in SL_2(\mathbb{C})}$.
Supposons $N' = \exp(N_1)$ avec $N_1 \in L_0(\mathbb{C})$.
- Si N_1 est semblable à une matrice du type $D(a)$, $\exp(N_1)$ est semblable à $\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}$ et N' est diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.
- Si N_1 est semblable à N, $N' = \exp(N_1)$ est semblable à $\exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{Tr}(N') = \mathrm{Tr}(\exp(N))$, ce qui est évidemment faux.
Donc N' n'appartient pas à l'image de $\widetilde{\exp}$.
Par ailleurs, les matrices $A(\theta)$ appartiennent à $L_0(\mathbb{C})$; comme $\exp(A(0)) = \exp(A(2\pi))$ et $A(0) \neq A(2\pi)$, $\widetilde{\exp}$ n'est pas injective. D'où :

$$\boxed{\widetilde{\exp} \text{ n'est ni surjective, ni injective.}}$$

IV Le cas $n = 3$

IV. A. f admet 3 valeurs propres 2 à 2 distinctes ; donc f est diagonalisable : il s'écrit $f + 0$ où 0 représente l'endomorphisme nul qui est nilpotent et, par ailleurs, f et l'endomorphisme nul commutent, donc :

$$\boxed{f \in \Gamma_3(E).}$$

B. 1) Le polynôme caractéristique de f étant scindé, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

$f - \lambda Id_E$ admet alors pour matrice dans $\mathcal{B}$ $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice nilpotente d'après la question I.B.4)c). D'où :

$$\boxed{f - \lambda Id_E \text{ est nilpotent.}}$$

2) f s'écrit alors $\lambda Id_E + (f - \lambda Id_E)$. Comme λId_E est diagonalisable, $f - \lambda Id_E$ est nilpotent et λId_E et $f - \lambda Id_E$ commutent,

$$\boxed{f \in \Gamma_3(E).}$$

C. 1) Le polynôme caractéristique de f étant scindé, f est trigonalisable. Donc il existe une base (e_1, e_2, e_3) telle que $\mathrm{Mat}_e(f)$ soit triangulaire supérieure. Les valeurs propres de f sont alors sur la diagonale et :

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists a, b, c \in \mathbb{C},\ \exists (e_1, e_2, e_3) \text{ tels que } \mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \\ \text{c'est-à-dire : } \left\{ \begin{array}{l} f(e_1 = \lambda e_1 \\ f(e_2) = a e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = b e_1 + c e_2 + \nu e_3 \end{array} \right. \end{array}}$$

2) $\det_e(e_1, e_2, e'_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Donc (e_1, e_2, e'_3) est une famille libre maximale :

$$\boxed{(e_1, e_2, e'_3) \text{ est une base de } E.}$$

3) ✓ $\begin{aligned} f(e'_3) &= f(e_3) + \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) \\ &= (b e_1 + c e_2 + \nu e_3) + (\alpha \lambda e_1) + \beta (a e_1 + \lambda e_2) \\ &= (b + \alpha\lambda + \beta a) e_1 + (c + \beta\lambda) e_2 + \nu e_3 \end{aligned}$

✓ $\nu e'_3 = \nu\alpha e_1 + \nu\beta e_2 + \nu e_3$

On a alors $f(e'_3) = \nu e'_3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b + \alpha\lambda + \beta a = \nu\alpha \\ c + \beta\lambda = \nu\beta \end{array} \right.$.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{ca}{(\nu - \lambda)^2} + \dfrac{b}{\nu - \lambda} \\ \beta = \dfrac{c}{\nu - \lambda} \end{array} \right.$$

(On sait que $\lambda \neq \nu$).

$$\boxed{\text{On a donc pu choisir } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } f(e'_3) = \nu e'_3.}$$

4) On a alors :

$$\boxed{M = \operatorname{Mat}_{(e_1,e_2,e'_3)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.}$$

5) Soient D la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ et N la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $M = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente.

De plus $ND = DN = \begin{pmatrix} 0 & a\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\boxed{M \in \Gamma_3(\mathbb{C}) \text{ ce qui montre aussi } f \in \Gamma_3(E).}$$

D. Soit f un endomorphisme de E. On a alors les possibilités suivantes :

✓ f admet 3 valeurs propres deux à deux distinctes ; d'après IV.A., $f \in \Gamma_3(E)$;

✓ f admet 3 valeurs propres égales ; d'après IV.B.2), $f \in \Gamma_3(E)$;

✓ f deux valeurs propres distinctes, dont une double, d'après IV.C.5), $f \in \Gamma_3(E)$.

Donc :

$$\boxed{\Gamma_3(E) = L(E).}$$

E. 1) Le polynôme caractéristique de $R(\theta)$ vaut :

$\chi_{R(\theta)} = -X(X^2 + \theta^2)$ et le spectre de $R(\theta)$ est $\{i\theta, -i\theta, 0\}$.

Par des calculs analogues à ceux de III.E.1), on obtient :

$R(\theta) = P \begin{pmatrix} i\theta & 0 & 0 \\ 0 & -i\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \exp(R(\theta)) &= P \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

J'ai montré :

$$\boxed{\exp(R(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2) Comme $\exp(R(0)) = \exp(R(2\pi))$ et que $R(0) \neq R(2\pi)$,

$$\boxed{\exp : L(E) \to GL(E) \text{ n'est pas injective.}}$$

ΔΔΔ