

I. Étude préliminaire.

I.A - Convergence des séries de Riemann.

I.A.1) Immédiat par positivité de l'intégration. $\square$

I.A.2) Si $\alpha \leq 0$ la série diverge grossièrement.

Si $0 < \alpha \leq 1$ la question précédente montre que $S_n(\alpha) \stackrel{\text{DEF}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$ en considérant $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ qui

est décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$ il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\alpha) = +\infty$ et la série diverge.

Si $\alpha > 1$ on a de même $S_n(\alpha) \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ donc la série converge en tant que série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées (et en outre $S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$).

En résumé la série converge si et seulement si $\alpha > 1$. $\square$

I.A.3) L'inégalité $1 \leq S(\alpha)$ est évidente et l'inégalité $S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ a été établie ci-dessus. $\square$

I.B - Première étude asymptotique du reste.

I.B.1) En sommant les inégalités de la question I.A.1) de $k = n+1$ à N puis en faisant tendre N vers $+\infty$ (licite vu la convergence des trois membres) on obtient :

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} \text{ donc } R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + r_n(\alpha)$$

$$\text{avec } 0 \leq r_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = f(n) - f(n-1) \leq \sup_{t \in [n-1, n]} |f'(t)| = \frac{1}{(n-1)^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\text{en notant } f : x \mapsto \frac{1}{(1-\alpha)x^\alpha}$$

$$\text{Ainsi on a bien } R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \square$$

I.B.2) La formule de Taylor appliquée à la fonction f définie ci-dessus de k vers $k+1$ fournit :

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k \text{ avec } A_k = \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}} dt$$

Or pour $t \in [k, k+1]$ on a $(k+1-t)^2 \leq 1$ et $\frac{1}{t^{\alpha+2}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+2}}$ donc par positivité de l'intégration on a bien :

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k \quad (1) \quad \text{avec } 0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+2)}{k^{\alpha+2}} \quad \square$$

I.B.3) Il découle de l'inégalité ci-dessus que la série $\sum A_k$ converge. En sommant alors l'égalité (1) pour k de n à N puis en faisant tendre N vers $+\infty$ (bien licite car tous les termes convergent) on obtient :

$$-f(n) = R_n(\alpha) - \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) + \sum_{k=n}^{+\infty} A_k \text{ donc } R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) - \sum_{k=0}^{+\infty} A_k.$$

$$\text{Or par la question I.B.1) } R_n(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \text{ et } \sum_{k=n}^{+\infty} A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} R_n(\alpha+2) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

$$\text{Ainsi } R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \quad \square$$

II. Formule de Taylor et nombres de Bernoulli.

II.A - Nombres de Bernoulli.

II.A.1) Avec les notations de l'énoncé il vient pour tout entier $p \geq 1$, toute fonction f et toute suite (a_n) :

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} g^{(k)} = \sum_{k=1}^p \sum_{q=0}^{p-1} \frac{a_q}{k!} f^{(q+k)} = a_0 f' + \sum_{r=2}^{2p-1} \alpha_r f^{(r)} \text{ avec } \alpha_r = \sum_{k=1}^r \frac{a_{r-k}}{k!}$$

Donc la suite (a_n) convient si et seulement si $a_0 = 1$ et $\alpha_r = 0$ pour $2 \leq r \leq p$

c'est à dire si et seulement si $a_0 = 1$ et $\sum_{k=1}^r \frac{a_{r-k}}{k!} = 0$ pour $2 \leq r \leq p$ soit encore puisque p est quelconque

si et seulement si $a_0 = 1$ et $\sum_{k=1}^r \frac{a_{r-k}}{k!} = 0$ pour tout $r \geq 2$ (1) c'est à dire encore

si et seulement si $a_0 = 1$ et $\sum_{k=1}^{p+1} \frac{a_{p+1-k}}{k!} = 0$ pour tout $p \geq 1$ (changement $r = p + 1$) soit encore

si et seulement si $a_0 = 1$ et $a_p = -\sum_{k=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-k}}{k!}$ pour tout $p \geq 1$ (2)

Or la relation (2) définit par itération une unique suite d'où la conclusion. $\square$

II.A.2) Les égalités demandées ont été établies ci-dessus. $\square$

On obtient en particulier $a_1 = -\frac{1}{2}$ et $a_2 = \frac{1}{12}$ $\square$

Le prédicat $\mathcal{P}_p = \langle |a_p| \leq 1 \rangle$ est vrai au rang 0 et en supposant qu'il soit vrai jusqu'au rang $p - 1$ avec $p \geq 1$ il

vient d'après (2) que $|a_p| \leq \sum_{k=2}^{p+1} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 2 < 1$ ce qui prouve que $\mathcal{P}_p$ est vrai.

Ainsi $|a_p| \leq 1$ pour tout entier p . $\square$

II.A.3)

a) Comme $|a_p| \leq 1$ le rayon de convergence de $\sum a_p z^p$ est supérieur ou égal à 1. $\square$

b) Pour $|z| < 1$ les deux séries $\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$ et $\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{z^q}{q!}$ convergent absolument donc leur produit de Cauchy converge

vers le produit des sommes donc $(e^z - 1)\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n z^n$ avec :

$\alpha_0 = a_0 = 1$ et pour $n \geq 2$: $\alpha_n = \sum_{q=1}^n \frac{a_{n-q}}{q!} = 0$ d'après (1) dans la question II.A.1)

Ainsi $(e^z - 1)\varphi(z) = z$ pour tout z tel que $|z| < 1$ et comme $e^z = 1$ si et seulement si $z = 2ik\pi$ il vient que $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ pour z non nul tel que $|z| < 1$ $\square$

c) Il en résulte que pour x non nul tel que $|x| < 1$ on a $\varphi(x) - a_1 x = \varphi(x) + \frac{x}{2} = \frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1}$ et on vérifie immédiatement que cette fonction est paire.

Par unicité du développement en série entière de $\varphi(x) - a_1 x$ il vient que $a_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$. $\square$

Par la formule (1) ou par développement limité à l'ordre 4 de $\frac{x}{e^x - 1}$ en 0 il vient que $a_4 = \frac{-1}{720}$ $\square$

II.B - Formule de Taylor.

II.B.1) g étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, la formule de Taylor à l'ordre $2p$ de k vers $k + 1$ fournit avec $p \geq 1$ fixé :

$$g(k+1) - g(k) = \sum_{k=1}^{2p} \frac{g^{(k)}(k)}{k!} + r(k) \text{ avec } r(k) = \frac{1}{(2p)!} \int_k^{k+1} (k+1-t)^{2p} g^{(2p+1)}(t) dt$$

Donc en tenant compte de la question II.A :

$$g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k) \text{ avec } R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + r(k)$$

Or $f^{(q)}(x) = (-1)^{q-1} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q-2)}{x^{\alpha+q-1}} = O\left(\frac{1}{x^{\alpha+2p}}\right)$ au voisinage de $x = +\infty$ pour $q \geq 2p+1$

Donc $\sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2p}}\right)$ par sommation un nombre de fois indépendant de k de $O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2p}}\right)$

De même $|r_k| \leq \frac{1}{(2p)!} \sup_{t \in [k, k+1]} |g^{(2p+1)}(t)| \leq \frac{1}{(2p)!} \sum_{j=0}^{2p-1} |a_j| \cdot |f^{(2p+1+j)}(k)| \leq \sum_{k=0}^{2p-1} |f^{(2p+1+j)}(k)| = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2p}}\right)$

En conclusion $g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k)$ (3) avec $R(k) = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2p}}\right)$ d'où l'existence de A . $\square$

II.B.2) Pour $p = 1$ la formule proposée n'est autre que celle établie en I.B.1). Supposons désormais $p \geq 2$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (puisque $\alpha > 1$) la série $\sum (g(k+1) - g(k))$ converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (g(k+1) - g(k)) = -g(n) = -\sum_{k=0}^{2p-1} a_k f^{(k)}(n) = -\sum_{k=0}^{2p-2} a_k f^{(k)}(n) \text{ car } a_{2p-1} = 0 \text{ puisque } p \geq 2.$$

Comme $R(k) = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2p}}\right)$ la série $\sum R(k)$ converge et le principe de sommation de la relation O dans le cas

de la convergence montre que $\sum_{k=n}^{+\infty} R(k) = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+2p}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right)$ par la question I.B.1)

Ainsi en sommant les égalités (3) pour $k \geq n$ on obtient :

$$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{k=1}^{p-1} a_{2k}f^{(2k)}(n) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right) \text{ pour tout entier } p \geq 2 \quad \square$$

II.B.3) Pour $\alpha = 3$ on obtient compte tenu des calculs précédents :

$$R_n(3) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right) \quad \square$$

III. Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III.A - Polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires.

- a) Si A_n est déterminé de manière unique alors A_{n+1} aussi car la relation $A'_{n+1} = A_n$ le détermine à une constante additive près fixée par la relation $\int_0^1 A_{n+1}(t) dt = 0$.

Comme $A_0 = 1$ est déterminé, la suite (A_n) est bien déterminée de manière unique. $\square$

Il est immédiat que A_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{n!}$. $\square$

Un calcul immédiat fournit $A_1 = X - \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$ et $A_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}$ $\square$

- b) On vérifie immédiatement que la suite (B_n) définie par $B_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$ vérifie les relations de définition de la suite (A_n) . $\square$

- c) Pour $n \geq 2$ on a avec les relations de définition de la suite (A_n) et le résultat précédent :

$$A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A'_n(t) dt = \int_0^1 A_{n-1}(t) dt = 0 \text{ puisque } n-1 \geq 1 \quad \square$$

$$A_{2n-1}(0) = -A_{2n-1}(1) = -A_{2n-1}(0) \text{ car } 2n-1 \geq 3 \geq 2 \text{ donc } A_{2n-1}(0) = 0 \quad \square$$

- d) La relation $A_n(X) = \sum_{k=0}^n c_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$ est vraie au rang $n=0$. En supposant qu'elle soit vraie au rang n il vient par primitivation $A_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^n c_k \frac{X^{n+1-k}}{(n+1-k)!} + A_{n+1}(0) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k \frac{X^{n+1-k}}{(n+1-k)!}$ ce qui établit la relation pour tout entier n . $\square$

Pour $n \geq 1$ on a $n+1 \geq 2$ donc $A_{n+1}(1) = A_{n+1}(0) = c_{n+1}$ et l'expression de A_{n+1} ci-dessus fournit alors $\sum_{k=0}^n \frac{c_k}{(n+1-k)!} = 0 \quad \square$

- e) Ainsi la suite (c_n) est-elle définie par $c_0 = 1$ puis par $c_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{(n+1-k)!} = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-i}}{i!}$ pour $n \geq 1$ ce qui est exactement la définition de la suite (c_n) (question II.A.2) $\square$

III.A.2) Fonction génératrice.

- a) On a $|c_n| = |a_n| \leq 1$ par II.A.2). Donc pour $t \in [-1, 1]$ il vient $|A_n(t)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n(t)z^n$ est au moins égal à 1. $\square$

- b) Fixons z tel que $|z| < 1$ et notons $u_n(t) = A_n(t)z^n$ et $\psi(t) = f(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$. Alors :

1) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ converge simplement sur $[0, 1]$

2) u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ avec $u'_0(t) = 0$ et $u'_n(t) = A_{n-1}(t)z^n$ pour $n \geq 1$

3) la série $\sum_{n \geq 1} u'_n(t)$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$ car $|u'_n(t)| = |A_{n-1}(t)| \cdot |z|^n \leq e|z|^n$

qui est bien le terme général d'une série convergente puisque $|z| < 1$

Donc ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et dérivable terme à terme de sorte que $\psi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}(t)z^n = z\psi(t)$.

Ainsi ψ est solution sur $[0, 1]$ de l'équation différentielle $y' = zy$ de sorte que $\psi(t) = \lambda(z)e^{zt}$.

Comme $\psi(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \varphi(z)$, on obtient d'après II.A.3.b) que :

$$f(t, z) = \frac{ze^{tz}}{e^z - 1} \text{ pour } t \in [0, 1] \text{ et } |z| < 1 \text{ avec } z \neq 0 \quad \square$$

- c) Légère erreur d'énoncé : on suppose dans cette question $0 < |z| < 2\pi$ de sorte que $e^z - 1$ soit non nul.

$$\text{Alors } \frac{ze^{z/2}}{e^z - 1} + \frac{z}{e^z - 1} = \frac{z(e^{z/2} + 1)}{e^z - 1} = \frac{z}{e^{z/2} - 1} \quad \square$$

Considérons désormais z quelconque tel que $0 < |z| < 1 < 2\pi$ de sorte qu'on puisse utiliser le résultat précédent, la question b) ci-dessus ainsi que la question II.A.3.b)

La question b) fournit avec $t = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{1}{2}\right) z^n = \frac{ze^{z/2}}{e^z - 1} = 2 \frac{z/2}{e^{z/2} - 1} - \frac{z}{e^z - 1} = 2\varphi\left(\frac{z}{2}\right) - \varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \text{ avec } b_n = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)a_n.$$

Cette relation est encore vraie en 0 car elle se réduit alors à $1=1$. Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{1}{2}\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \quad \forall z \in D(0, 1)$

Par unicité du développement en série entière on obtient $A_n \left(\frac{1}{2}\right) = b_n = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$

III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli.

- a) Soit le prédicat $\mathcal{P}(k) = \langle A_{4k+2}, A_{4k+3}, A_{4k+4} \text{ et } A_{4k+5} \text{ ont les variations indiquées} \rangle$

- $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

- En effet $A_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{6})$ donc A_2 a les variations requises.

- Comme $A'_3 = A_2$, A_3 a bien les variations requises car en outre $A_3(0) = A_3(1) = 0$ par III.A.1.c) et $A_3(\frac{1}{2}) = 0$ par III.A.2.c) puisque $a_3 = 0$ par II.A.3.c).

- Comme $A'_4 = A_3$ il vient que A_4 croît sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis décroît sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Supposons $A_4(0) = A_4(1) \geq 0$. Alors A_4 est positive ou nulle sur $[0, 1]$ et comme elle est continue d'intégrale nulle il vient A_4 nulle sur $[0, 1]$ donc $A'_4 = A_3$ aussi ce qui n'est pas. Ainsi $A_4(0) = A_4(1) < 0$. Supposons désormais $A_4(\frac{1}{2}) \leq 0$. Alors A_4 est négative ou nulle sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle. Comme ci-dessus on en déduit A_4 donc A_3 nulle sur $[0, 1]$ ce qui n'est pas. Donc $A_4(\frac{1}{2}) > 0$.

- De $A'_5 = A_4$ on en déduit que A_5 a les variations requises car, exactement de la même manière que pour A_3 (comme 5 est impair) on a $A_5(0) = A_5(1) = A_5(\frac{1}{2}) = 0$.

- Supposons $\mathcal{P}(k)$ vrai pour $k \geq 0$.

- Comme $A'_{4k+6} = A_{4k+5}$ il vient que A_{4k+6} décroît sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis croît sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Si $A_{4k+6}(\frac{1}{2}) \geq 0$ alors exactement comme ci-dessus par positivité "améliorée" de l'intégration on en déduit que A_{4k+6} donc A_{4k+5} est nulle sur $[0, 1]$ ce qui n'est pas. Donc $A_{4k+6}(\frac{1}{2}) < 0$. Puis on prouve de même par l'absurde que $A_{4k+6}(0) = A_{4k+6}(1) > 0$.

- Exactement le même raisonnement que celui fait pour A_3 (resp. A_4, A_5) prouve alors successivement que A_{4k+7}, A_{4k+8} et A_{4k+9} ont les variations requises.

- Ainsi les variations des polynômes A_n avec $n \geq 2$ se trouvent bien établies par récurrence. $\square$

- b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geq 2$ donc les variations ci-dessus montrent que $|A_{2n}(x)| \leq \max(|A_{2n}(0)|, |A_{2n}(\frac{1}{2})|)$.

Or $A_{2n}(0) = a_{2n}$ et $|A_{2n}(\frac{1}{2})| < |a_{2n}|$ par III.A.2.c). Donc $|A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}|$ pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$ $\square$

Par ailleurs $A_{2n+1}(x) = \int_{1/2}^x A_{2n}(t) dt$ puisque $A_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$ donc, compte tenu du résultat précédent :

$$|A_{2n+1}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x \in [0, 1] \quad \square$$

III.B - Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III.B.1)

- a) $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = \left[A_1(t)f'(t) \right]_0^1 - \int_0^1 A_1(t)f''(t) dt$ par intégration par parties ce qui prouve que la formule proposée est vraie pour $q = 1$.

En supposant qu'elle soit vraie au rang $q \geq 1$ il vient à nouveau par parties que $\int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt = \left[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt$ ce qui prouve, en remplaçant le reste intégral par cette valeur dans la formule au rang q vraie par hypothèse de récurrence, que la formule est vraie au rang $q+1$. $\square$

- b) En particulier avec $q = 2p+1$ en tenant compte de $A_j(1) = A_j(0) = a_j$, de $a_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$ et de $a_1 = -\frac{1}{2}$ on obtient la formule proposée. $\square$

III.B.2) Par application (bien licite) du résultat précédent à la fonction f_k pour $k \geq n$ il vient :

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{2} (f'(k) + f'(k+1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u) du$$

par changement de variable dans le reste intégral.

Par sommation de $k = n$ à $k = N$ on obtient :

$$\sum_{k=n}^N f'(k) = f(N+1) - f(n) + \frac{1}{2} f'(n) + \frac{1}{2} f'(N+1) + \sum_{j=1}^p a_{2j} (f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)) + \int_n^{N+1} A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u) du$$

Or $\left| A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u) \right| = \varepsilon_p \left| A_{2p+1}^*(u) \right| f^{(2p+2)}(u)$ avec $\varepsilon_p = \pm 1$ car $f^{(2p+2)}$ est de signe fixe sur $[n, +\infty[$

Donc $\left| A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u) \right| \leq \frac{1}{2} |a_{2p}| \cdot \varepsilon_p f^{(2p+2)}(u)$ qui est intégrable sur $[n, +\infty[$ puisque $\lim_{u \rightarrow +\infty} f^{(2p+1)}(u) = 0$

donc existe bien. Ainsi $A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u)$ est intégrable sur $[n, +\infty[$ et on prouve au passage que :

$$\left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u) du \right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2} |f^{(2p+1)}(n)| \quad \square$$

Comme f et toutes ses dérivées tendent vers 0 en $+\infty$ cela prouve que le membre de droite de l'égalité ci-dessus admet une limite lorsque $N \rightarrow +\infty$. Ainsi la série $\sum f'(k)$ converge et on obtient bien :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \quad \square$$

III.B.3) Il est immédiat de vérifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ avec $\alpha > 1$ satisfait bien les hypothèses de

III.B.2) du moins avec $n \geq 1$. En lui appliquant la formule ci-dessus au rang $p-1$ on obtient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t) dt$$

ce qui redonne la formule II.B.2) puisque d'après la question précédente le reste intégral est un $O(f^{(2p-1)}(n))$ et que $f^{(2p-1)}(n) = O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ par un calcul déjà fait. $\square$

IV. Compléments sur l'erreur.

IV.A - Encadrement de l'erreur.

IV.A.1) On a $\int_0^1 A_n(t) g(t) dt = \int_0^{1/2} A_n(t) g(t) dt + \int_0^{1/2} A_n(1-t) g(1-t) dt$

Si $n \equiv 1 \pmod{4}$ ou $n \equiv 3 \pmod{4}$ alors $A_n(t) = -A_n(1-t)$ d'après III.A.1.b) donc :

$$\int_0^1 A_n(t) g(t) dt = \int_0^{1/2} A_n(t) (g(t) - g(1-t)) dt$$

Si $n \equiv 1 \pmod{4}$ alors pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $A_n(t) \leq 0$ d'après les variations de A_n et $g(t) - g(1-t) \leq 0$ puisque g est

croissante. Donc $\int_0^1 A_n(t) g(t) dt \geq 0$.

De même si $n \equiv 3 \pmod{4}$ alors $A_n(t) \geq 0$ donc $\int_0^1 A_n(t) g(t) dt \leq 0$ $\square$

IV.A.2) D'après III.B.2) et III.B.3) on a $S(\alpha) = \tilde{S}_{n,2p}(\alpha) + \tilde{R}_{n,2p}(\alpha)$ avec $\tilde{R}_{n,2p}(\alpha) = \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt$

$$\text{Or } \tilde{R}_{n,2p}(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_0^1 A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(k+t) dt$$

Or en notant $g_k : t \mapsto f^{(2p+2)}(k+t)$ on a $g'(t) = f^{(2p+3)}(k+t)$ positive car $2p+3$ est impair.

On peut donc appliquer le résultat précédent qui montre que si p est pair alors $\tilde{R}_{n,2p}(\alpha) \geq 0$ et $\tilde{R}_{n,2p}(\alpha) \leq 0$ sinon. En particulier on a bien les deux inégalités proposées par l'énoncé. $\square$

Si $q = 2p$ alors :

$$\left| S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2q}(\alpha) \right| \leq \left| S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \right| \leq \left| \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \right| = \left| a_{4p+2} f^{(4p+2)}(n) \right| = \left| a_{2q+2} f^{(2q+2)}(n) \right|$$

Si $q = 2p - 1$ alors :

$$\left| S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2q}(\alpha) \right| \leq \left| S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) \right| \leq \left| \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \right| = \left| a_{4p} f^{(4p)}(n) \right| = \left| a_{2q+2} f^{(2q+2)}(n) \right|$$

Ainsi dans tous les cas on a bien $\left| S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2q}(\alpha) \right| \leq \left| a_{2q+2} f^{(2q+2)}(n) \right| \quad \forall q \geq 1 \quad \forall n \geq 1 \quad \square$

IV.A.3) En particulier $\left| S(3) - S_{100,4}(3) \right| \leq \left| a_6 f^{(6)}(100) \right|$. Or $f^{(6)}(x) = (-1)^5 \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{x^8} = -\frac{7!}{2x^8}$

Comme $a_6 = \frac{1}{42 \times 6!}$ on a $\left| S(3) - S_{100,4}(3) \right| \leq \frac{7}{84} 10^{-16} \leq 10^{-17} \quad \square$

IV.B -) Séries de Fourier.

IV.B.1) La 2π -périodicité de $\tilde{A}_p$ est évidente ainsi que sa continuité sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

En outre $\lim_{x \rightarrow 2k\pi^-} \tilde{A}_p(x) = \lim_{x \rightarrow 1} A_p(x) = A_p(1)$ et de même $\lim_{x \rightarrow 2k\pi^+} \tilde{A}_p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} A_p(x) = A_p(0)$.

Ainsi $\hat{A}_p$ est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \geq 1$. $\square$

Remarquons que comme $A_p(0) = A_p(1)$ pour $p \geq 2$ elle est continue sur $\mathbb{R}$ pour $p \geq 2$.

Remarquons aussi que de même que précédemment on prouverait qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour $p \geq 1$. $\square$

IV.B.2)
$$\hat{A}_p(n) = \int_0^1 \tilde{A}_p(2\pi t) e^{-in2\pi t} dt = \int_0^1 A_p(t) e^{-2i\pi n t} dt$$

Donc $\hat{A}_p(0) = 0$ et pour $n \neq 0$: $\hat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(t) f^{(p+1)}(t) dt$ avec $f(t) = \frac{e^{2i\pi n t}}{(-2i\pi n)^{p+1}}$

La formule III.B.1.a) fournit alors puisque $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(0) = 1$ pour $k \geq 0$ et $A_k(1) - A_k(0) = 0$ pour $k \neq 1$:

$$\hat{A}_p(n) = (-1)^p \times \frac{A_1(0) - A_1(1)}{(-2i\pi n)^p} = \frac{-1}{(2i\pi n)^p} \quad \forall n \neq 0 \quad \square$$

IV.B.3) D'après les remarques de IV.B.1), $\hat{A}_1$ est continue par morceaux (et continue sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$) et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Donc :

La série de Fourier de $\hat{A}_1$ converge simplement vers $\hat{A}_1$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et vers $\frac{1}{2}(A_1(0) + A_1(1)) = 0$ en $2k\pi$ $\square$

En outre pour $p \geq 2$, $\hat{A}_p$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $\hat{A}_p$. $\square$

IV.B.4) En particulier pour $p \geq 1$ on a :

$$\tilde{A}_{2p}(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \hat{A}_{2p}(n) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(2i\pi n)^{2p}} = (-1)^{p+1} \frac{2}{(2\pi)^{2p}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p+1} \frac{S(2p)}{2^{2p-1} \pi^{2p}} \quad \square$$

IV.C - Comportement de l'erreur.

IV.C.1) Du calcul déjà effectué de $f^{(k)}(x)$ on tire immédiatement $\frac{f^{(2p+2)}(n)}{f^{(2p)}(n)} = \frac{(\alpha + 2p)(\alpha + 2p - 1)}{n^2}$.

La question précédente donne alors immédiatement $\left| \frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)} \right| = \frac{(\alpha + 2p)(\alpha + 2p - 1) S(2p + 2)}{4n^2 \pi^2 S(2p)} \quad \square$

IV.C.2) L'encadrement $1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ du I.A.3) montre que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha) = 1$ donc d'après la question ci-dessus

on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)} \right| = +\infty$.

Or $\tilde{S}_{n,2p} = S_n(\alpha) - f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n)$ et la dernière série (qui est alternée) du membre de droite diverge donc grossièrement.

Ainsi à n fixé, $\tilde{S}_{n,2p}$ ne converge pas vers $S(\alpha)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ $\square$

Il y a donc un compromis à réaliser pour choisir un couple (n, p) tel que, d'après IV.A.2), $|a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)|$ soit le plus petit possible. $\square$

FIN