

EXERCICE

- 1°. Le petit **Théorème de FERMAT** affirme que : $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, car $3 \wedge 11 = 1$, donc $p \leq 10$, un petit calcul donne $p = 5$.
- 2°. $5^2 = 25 \equiv 3 \pmod{11}$, donc $5^{2n} \equiv 3^n$, $3^{2012} = (3^5)^{402} \times 9 \equiv 9 \pmod{11}$ par suite :
 $3^{n+2012} \equiv 3^n \times 9 \pmod{11}$ et $9 \times 5^{2n} \equiv 9 \times 3^n \pmod{11}$, donc $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} \equiv 0 \pmod{11}$.

PROBLÈME

Partie I. Étude du cas $n = 2$.

- 1°. Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi_A(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) - (M + \lambda N)A \\ &= \varphi_A(M) - \lambda \varphi_A(N)\end{aligned}$$

Il est évident que $\varphi_A(A) = \varphi_A(I) = 0$, donc $A, I_2 \in \text{Ker}(\varphi_A)$.

- 2°. Un petit calcul donne : $\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$; $\varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$ et la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est
- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

- 3°. Le polynôme caractéristique de la matrice précédente est : $\chi_{\varphi_A} = X^2(X^2 - [(d-a)^2 + 4bc])$.

- 4°. Les matrices $A; I \in \text{Ker}(\varphi_A)$ et $A \neq \lambda I_2$ donc la famille (A, I_2) qui est libre et formé de vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0 , par suite 0 est valeur propre de φ_A de multiplicité ≥ 2 .

Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, alors les racines de χ_{φ_A} sont simples et φ_A est diagonalisable.

Si φ_A est diagonalisable alors χ_{φ_A} est scindé dans $\mathbb{R}$, donc $(d-a)^2 + 4bc \geq 0$, si on suppose $(d-a)^2 + 4bc = 0$, alors $\chi_{\varphi_A} = X^4$, et le polynôme minimal de φ_A est X , c'est à dire $\varphi_A = 0$ absurde, donc $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

- 5°. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - (a+d)X + ad - bc$, son discriminant est $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$.

Si φ_A est diagonalisable alors de la question précédente $(d-a)^2 + 4bc > 0$, par suite χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

Si A est diagonalisable, alors $(d-a)^2 + 4bc \geq 0$, si on suppose que $(d-a)^2 + 4bc = 0$, alors χ_A aura une racine simple qu'on notera α , et $\chi_A = (X - \alpha)^2$ donc son polynôme minimale est $X - \alpha$, alors $A = \alpha I_2$, ce qui est absurde, donc $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

Partie II. Étude du cas général.

- 6°. a/ On pose $D = (d_{i,j})$, où $d_{i,j} = \delta_{i,j} \lambda_i$, alors

$$\begin{aligned}DE_{i,j} - E_{i,j}D &= \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} d_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j} - \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} d_{k,\ell} E_{i,j} E_{k,\ell} \\ &= \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} d_{k,\ell} \delta_{\ell,i} E_{k,j} - \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} d_{k,\ell} \delta_{j,k} E_{i,\ell} \\ &= (\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j}\end{aligned}$$

b/ $A = PDP^{-1}$, donc

$$\begin{aligned}
 \varphi_A(B_{i,j}) &= AB_{i,j} - B_{i,j}A \\
 &= PDP^{-1}B_{i,j} - B_{i,j}PDP^{-1} \\
 &= PDE_{i,j}P^{-1} - PE_{i,j}DP^{-1} \\
 &= P(DE_{i,j} - E_{i,j}D)P^{-1} \\
 &= (\lambda_i - \lambda_j)PE_{i,j}P^{-1} \\
 &= (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}
 \end{aligned}$$

Donc pour tout couple (i, j) la matrice non nul $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A .

c/ La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme, donc la famille $(PE_{i,j}P^{-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base aussi de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe une base de vecteurs propres de φ_A , donc φ_A est diagonalisable.

- 7°. a/ i. φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc toutes ses valeurs propres sont réelles.
 ii. Soit $z \in \mathbb{C}$, $\det B = \det {}^tB$, donc

$$\begin{aligned}
 z \in \text{Sp}(A) &\iff \det(A - zI_n) = 0 \\
 &\iff \det({}^tA - zI_n) = 0 \\
 &\iff z \in \text{Sp}({}^tA)
 \end{aligned}$$

- iii. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est à coefficients réelles donc on peut supposer que $z, \bar{z}$ deux valeurs propres de A .

$$\begin{aligned}
 \varphi_A(X {}^tY) &= AX {}^tY - X {}^tYA \\
 &= zX {}^tY - \bar{z}X {}^tY \text{ car } {}^tYA = \bar{z} {}^tY \\
 &= (z - \bar{z})X {}^tY
 \end{aligned}$$

Le vecteur $X {}^tY \neq 0$, en effet

$$\begin{aligned}
 X {}^tY = 0 &\implies {}^tXX {}^tY = 0 \\
 &\implies \|X\| {}^tY = 0 \text{ car } \|X\| \neq 0 \\
 &\implies {}^tY = 0
 \end{aligned}$$

absurde, donc $z - \bar{z}$ est une valeur propre de φ_A .

b/ De la question précédente on en déduit que $\text{Im}(z) = 0$, donc $z \in \mathbb{R}$.

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (**Théorème de D'ALEMBERT GAUSS**), donc χ_A admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$, cette valeur z est en fait réelle, par suite A admet au moins valeur propre réelle.

c/

$$\begin{aligned}
 AP_{i,j}X &= P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X \text{ car } \varphi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j}P_{i,j} \\
 &= \lambda P_{i,j}X + \lambda_{i,j}P_{i,j}X \\
 &= (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X
 \end{aligned}$$

d/ Considérons l'application : $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n)$
 $M \longmapsto MX$

ψ est évidemment linéaire.

Soit x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base c est X .

$X \neq 0$ donc $x \neq 0$, par le théorème de la base incomplète il existe $(v_2, \dots, v_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tel que $(x, v_2, \dots, v_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y = \text{mat}_c(x)$, il existe un unique endomorphisme w de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $w(x) = y$ et $w(v_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, soit M la matrice de w dans la base c , on a bien $MX = Y$, c'est à dire que ψ est surjective.

La famille $(P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$, son image par ψ est un système générateur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n)$, par suite on peut extraire de la famille $(P_{i,j}X)_{1 \leq i,j \leq n}$ une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n)$.

Comme ces derniers vecteurs X_i pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ vérifient la relation $AX_i = \alpha_i X_i$ où α_i est l'un des $\lambda + \lambda_{i,j}$, alors, l'endomorphisme u possède une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$.

Conclusion A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres associés à une valeur propre 0.

8°. La famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est libre, en effet si le polynôme $Q = a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_1X + a_0$ est annulateur de A alors il est nul, car les seuls polynômes annulateur de A non nul sont de degré $\geq m$, donc tous ses coefficients sont nuls.

Et si on prend un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, en effectuant la division euclidienne de P par π_A , il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $P = Q\pi_A + R$ où le degré de $R \leq m-1$, alors $P(A) = R(A)$ car $\pi_A(A) = 0$, et $R(A) \in \text{vect}(I_n, A, \dots, A^{m-1})$.

9°. $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \text{Ker}(\varphi_A)$, donc $\mathbb{R}[A] \subset \text{Ker}(\varphi_A)$, par suite de la question précédente $\dim \text{Ker}(\varphi_A) \geq m = \dim \mathbb{R}[A]$.

10°. Un cas d'égalité

a/ Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(y) = 0$, si on suppose que les réels a_i , $0 \leq i \leq n-1$ ne sont pas tous nuls, alors l'ensemble $J = \{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / a_i \neq 0\}$ est non vide, soit $j = \min J \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors l'égalité précédente devient $\sum_{i=j}^{n-1} a_i u^i(y) = 0$, on compose par l'endomorphisme u^{n-1-j} , on obtient $a_j u^{n-1}(y) = 0$, donc $a_j = 0$, absurde par suite $J = \emptyset$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre de cardinal maximal c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

b/ $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$ signifie que v commute avec u .

Pour montrer que les endomorphismes v et $\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$ sont égaux il suffit de montrer qu'ils sont égaux sur les éléments d'une base.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v(u^{n-j}(y)) = u^{n-j}(v(y)) = u^{n-j}(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(u^{n-j}(y))$.

c/ Posons $F = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i} / (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \right\} = \text{vect}(u^{n-i})_{1 \leq i \leq n}$.

Il est évident que $F \subset \text{Ker}(\varphi_A)$.

De la question précédente $\text{Ker}(\varphi_A) \subset F$, ainsi $\text{Ker}(\varphi_A) = F$

11°. a/ Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors v commute avec u et donc v commute avec $(u - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}^n})$, alors $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $v(E_u(\lambda_k)) \subset (E_u(\lambda_k))$, c'est un petit résultat du cours.

Réciproquement si $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $v(E_u(\lambda_k)) \subset (E_u(\lambda_k))$. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $x \in E_u(\lambda_k)$, alors $v(u(x)) = \lambda_k v(x)$, et $u(v(x)) = \lambda_k v(x)$ car $v(x) \in E_u(\lambda_k)$, ainsi $v \circ u = u \circ v$ sur $E_u(\lambda_k)$, comme u est diagonalisable, les sous espaces $E_u(\lambda_k)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, donc $v \circ u = u \circ v$ sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b/ Dans une base adapté à la décomposition $\bigoplus_{k=1}^n E_u(\lambda_k) = \mathbb{R}^n$, la matrice de φ_A est triangulaire par blocs et chaque bloc est une matrice d'ordre la dimension de $E_u(\lambda_k)$.

c/ De la question précédente la dimension cherché est $\sum_{k=1}^p m_k^2$.

d/ u est diagonalisable donc $\sum_{k=1}^p m_k = 7$ entraîne $1 \leq p \leq 7$. Notons $d = \sum_{k=1}^p m_k^2$.

Les valeurs possibles de d sont : $7-9-11-13-15-17-19-21-25-27-29-37-49$.

Partie VI. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle.

12°. La relation est évidente pour $k = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $j \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, de la relation $AB - BA = \alpha B$, on en déduit $B^j AB^{k-j} - B^{j+1} AB^{k-1-j} = \alpha B^k$ en multipliant la relation précédente à droite par B^{k-1-j} et à gauche par B^j , alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} (B^j AB^{k-j} - B^{j+1} AB^{k-1-j}) &= \alpha k B^k \implies \sum_{j=0}^{k-1} B^j AB^{k-j} - \sum_{j=1}^k B^j AB^{k-j} = \alpha k B^k \\ &\implies AB^k - B^k A = \alpha k B^k \end{aligned}$$

13°. Posons $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$

$$\varphi_A(P(B)) = AP(B) - P(B)A = \sum_{k=0}^m a_k (AB^k - B^k A) = \alpha \sum_{k=0}^m a_k k B^k = \alpha \sum_{k=1}^m a_k k B^{k-1} B$$

Donc $\varphi_A(P(B)) = \alpha P(B) \cdot B$

14°. Remarquons que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est de degré $\leq d-1$, de plus c'est un annulateur de B , en effet $B \cdot \pi'_B(B) - d\pi_B(B) = B \cdot \pi'_B(B) = \frac{1}{\alpha}(\varphi_A(\pi_B(B))) = 0$

15°. Posons $\pi_B = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où $a_d = 1$. De la question précédente on en déduit que :

$$\begin{aligned} X\pi'_B &= d\pi_B \implies \sum_{k=0}^d k a_k X^k = \sum_{k=0}^d d a_k X^k \\ &\implies \forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket \quad k a_k = d a_k \\ &\implies \forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket \quad a_k = 0 \end{aligned}$$

Donc $\pi_B = X^d$, conclusion $B^d = 0$.

sadikoulmeki@yahoo.fr