

Épreuve de Mathématiques C

Préambule

1. Puisque f est de classe C^1 sur $[a, b]$, sa dérivée f' est continue sur ce segment, donc bornée, ce qui se traduit par :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall t \in [a, b], \quad |f'(t)| \leq M.}$$

2. Ainsi, pour tout $t \in [a, b]$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| f'(t) e^{i k t} \right| = |f'(t)| \leq M$$

et par intégration on peut écrire :

$$0 \leq \left| \frac{1}{k} \int_a^b f'(t) e^{i k t} dt \right| \leq \frac{1}{k} \int_a^b |f'(t) e^{i k t}| dt \leq \frac{1}{k} \int_a^b M dt = \frac{M(b-a)}{k}$$

et puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{M(b-a)}{k} = 0$, il vient :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_a^b f'(t) e^{i k t} dt = 0.}$$

3. Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(t) = e^{i k t}$ étant de classe C^1 sur $[a, b]$, le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt$$

c'est-à-dire :

$$i k \int_a^b f(t) e^{i k t} dt = e^{i k b} f(b) - e^{i k a} f(a) - \int_a^b f'(t) e^{i k t} dt$$

ou encore, pour k entier naturel non nul :

$$\int_a^b f(t) e^{i k t} dt = \frac{e^{i k b} f(b) - e^{i k a} f(a)}{i k} + \frac{i}{k} \int_a^b f'(t) e^{i k t} dt.$$

Mais

$$0 \leq \left| \frac{e^{i k b} f(b) - e^{i k a} f(a)}{i k} \right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{k}$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{i k b} f(b) - e^{i k a} f(a)}{i k} = 0.$$

Avec le résultat de la question précédente, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i k t} dt = 0.}$$

Partie I

1. (a) i. On sait que, lorsque u tend vers 0, $\sin u \sim u \sim \tan u$, donc :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2nt)}{\tan t} = 2n.}$$

- ii. On a : $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(2nt) = \sin(n\pi) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan t = +\infty$, donc sans difficulté :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2nt)}{\tan t} = 0.}$$

- iii. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{\tan t}$, continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, se prolonge par continuité en 0 et $\frac{\pi}{2}$ d'après les questions précédentes. L'intégrale I_n est donc faussement impropre. Notamment,
l'intégrale I_n est convergente.

- (b) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{\sin(2t)}{\tan t} = 2 \cos^2 t = 1 + \cos(2t)$$

donc

$$I_1 = \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ce qui donne :

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

- (c) Si l'on note $\mathcal{I}m(z)$ la partie imaginaire d'un complexe z , on a :

$$\sin((2n+2)t) - \sin(2nt) = \mathcal{I}m(e^{2(n+1)it} - e^{2nit})$$

avec

$$\begin{aligned} e^{2(n+1)it} - e^{2nit} &= e^{2(n+1)it} (e^{it} - e^{-it}) \\ &= 2(-\sin((2n+1)t) \sin t + i \cos((2n+1)t) \sin t) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sin((2n+2)t) - \sin(2nt) = 2 \cos((2n+1)t) \sin t.}$$

- (d) On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos((2n+1)t) \cos t \, dt.$$

Mais par un calcul analogue au précédent :

$$2 \cos((2n+1)t) \cos t = \cos((2n+2)t) + \cos(2nt)$$

donc

$$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2(n+1)} + \frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

Avec la question (b), on peut conclure que

la suite de terme général I_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est constante égale à $\pi/2$.

2. Pour p entier naturel non nul, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(pt)}{t}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur p . L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(pt)}{t} dt$ est donc convergente, car faussement impropre. C'est vrai notamment pour $p = 2n$ avec n entier naturel non nul ou pour $p = 1$.

Les intégrales considérées sont convergentes.

3. Comme différence de telles fonctions, ϕ est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Elle se prolonge par continuité en $\frac{\pi}{2}$ avec la valeur $\frac{2}{\pi}$.

Lorsque t tend vers 0, $\tan^2 t = t^2 + o(t^3)$ donc

$$\tan t = \int_0^t (1 + \tan^2 u) du = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

puis

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - t}{t \tan t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{3t^2} = 0$$

et ϕ se prolonge en une fonction $\tilde{\phi}$ continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\tilde{\phi}'(t) = \frac{-1}{t^2} + \frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} = 1 + \frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2}.$$

On voit que

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tilde{\phi}'(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$$

et par ailleurs, lorsque t tend vers 0,

$$\frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{(t - \tan t)(t + \tan t)}{t^2 \tan^2 t} \sim \frac{1}{t^4} \left(-\frac{t^3}{3} + o(t^3) \right) \left(2t + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \right) \sim \frac{-2}{3}$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\phi}'(t) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

En conséquence du théorème de la limite de la dérivée, on peut conclure que

le prolongement $\tilde{\phi}$ est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.

4. Puisque $\tilde{\phi}$ est C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, il découle du préambule que la suite de terme général

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tilde{\phi}(t) e^{in t} dt$$

converge vers 0, et la suite extraite $(\alpha_{2n})_n$ également. Il est en de même de la suite de terme général $(\mathcal{I}m(\alpha_{2n}))$ car $0 \leq |\mathcal{I}m(\alpha_{2n})| \leq |\alpha_{2n}|$. Or

$$\mathcal{I}m(\alpha_{2n}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tilde{\phi}(t) \sin(2nt) dt = J_n - I_n$$

donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - I_n) = 0.}$$

5. (a) La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ étant continue sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right]$, l'intégrale est impropre en $+\infty$. Elle est égale à

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u(t) v'(t) dt$$

où les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos t$ sont C^1 sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right]$ et telles que le produit uv admette des limites finies (nulles) aux bornes de l'intervalle d'intégration. L'intégrale a donc même nature que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u'(t) v(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Elle est donc convergente, car $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ donc pour $\alpha = 2$.

L'intégrale considérée est convergente.

- (b) La fonction $t \mapsto u = 2n t$ est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $]0, n\pi]$, donc par théorème de changement de variable :

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente, par composition de limites, on a bien :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

- (c) D'après la question 1.(d), on peut écrire :

$$J_n = I_n + (J_n - I_n) = \frac{\pi}{2} + (J_n - I_n)$$

donc, d'après les questions 4 et 5.(b) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Partie II

1. (a) Par la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt = \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt &= \int_{\pi}^{n\pi} \left(\frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t}{t^2} \right) dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_{\pi}^{n\pi} \\ &= \frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(\pi)}{\pi} \end{aligned}$$

et comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$, cela conduit bien à

$$\boxed{\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt.}$$

(b) On écrit :

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dt}{t^2}$$

donc

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k(k+1)} \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{k^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$, notamment pour $\alpha = 2$, donc
la série considérée est convergente car absolument convergente.

La suite des sommes partielles associées a pour terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

donc

cette suite est convergente.

Pour montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge, on peut montrer que la fonction

$$H : x \mapsto \int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Les questions précédentes font apparaître que

$$H(n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi} - S_n$$

est la somme de trois suites convergentes, donc est le terme général d'une suite convergente. Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(n\pi)$.

La fonction H est de classe C^1 sur $[\pi, +\infty[$, comme primitive d'une fonction continue sur cet intervalle. Elle l'est donc sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, et pour $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$:

$$|H'(x)| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n\pi}$$

donc, par application de l'inégalité des accroissements finis :

$$|H(x) - H(n\pi)| \leq \frac{|x - n\pi|}{n\pi} \leq \frac{|(n+1)\pi - n\pi|}{n\pi} = \frac{1}{n}$$

puis par inégalité triangulaire :

$$0 \leq |H(x) - \ell| = |H(x) - H(n\pi) + H(n\pi) - \ell| \leq \frac{1}{n} + |H(n\pi) - \ell|.$$

Soit alors x un réel de $[\pi, +\infty[$. Si n_x est la partie entière de $\frac{x}{\pi}$, on a $x \in [n_x \pi, (n_x + 1) \pi]$. Lorsque x tend vers l'infini, il en est de même de n_x puisque $n_x \geq \frac{x}{\pi} - 1$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n_x} + |H(n_x \pi) - \ell| \right) = 0$$

le théorème des gendarmes permet de conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |H(x) - \ell| = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \ell$.

On a bien établi que

l'intégrale considérée est convergente.

2. (a) Posons $u_n = \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$. Comme a n'est pas nul, u_n non plus et

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a^{2n+3}}{a^{2n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \right| \sim \frac{a^2}{4n^2}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0 < 1$$

ce qui permet de conclure, d'après le critère de d'Alembert, que

la série considérée est absolument convergente.

- (b) On sait que, pour tout t réel :

$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

et l'on en déduit :

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$$

pour $t \neq 0$, l'égalité étant vraie aussi pour $t = 0$, et le rayon de convergence est toujours infini.

La fonction ψ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

- (c) On peut primitiver terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, donc la primitive de ψ s'annulant en 0 est

$$a \mapsto \int_0^a \psi(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^a t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^a$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{\int_0^a \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}}.$$

3. (a) On rappelle que :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

le rayon de convergence étant infini.

(b) On a, puisque $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$:

$$\left| \frac{(-1)^n a^n}{n!} \operatorname{Re}(e^{-int}) \right| = \frac{a^n}{n!} |\operatorname{Re}(e^{-int})| \leq \frac{a^n}{n!} |e^{-int}| = \frac{a^n}{n!}$$

ce qui montre que la série de terme général $\frac{(-1)^n a^n}{n!} \operatorname{Re}(e^{-int})$ est absolument convergente. On peut alors écrire :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \operatorname{Re}(e^{-int}) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n a^n}{n!} \operatorname{Re}(e^{-int}) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

et puisque

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \operatorname{Re}(e^{-int}) dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \operatorname{Re}(e^{-int}) \right| dt$$

on obtient bien

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \operatorname{Re}(e^{-int}) dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

ou encore

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \operatorname{Re}(e^{-int}) dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

(c) D'après la question (a) :

$$e^{-a e^{-it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-a e^{-it})^n}{n!}$$

c'est-à-dire :

$$e^{-a e^{-it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n e^{-int}}{n!}.$$

(d) Sans difficulté :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re}(e^{-ipt}) dt = \frac{\pi}{2} \text{ si } p = 0.$$

Pour n entier naturel non nul :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re}(e^{-int}) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt) dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re}(e^{-int}) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \geq 1 \\ \frac{(-1)^p}{2p+1} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}.$$

(e) D'après la question (c) :

$$e^{-a e^{-it}} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n a^n e^{-int}}{n!} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n e^{-int}}{n!}$$

donc

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \mathcal{R}e(e^{-i n t}) = \mathcal{R}e(e^{-a e^{-i t}}) - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n a^n}{n!} \mathcal{R}e(e^{-i n t})$$

puis, d'après la question (b) :

$$0 \leq \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-a e^{-i t}}) dt - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-i n t}) dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Mais $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, car c'est le reste d'une série convergente.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite de terme général $\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-i n t}) dt$ converge vers $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-a e^{-i t}}) dt$, ou en d'autres termes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-a e^{-i t}}) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-i n t}) dt.$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-i n t}) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-i 0 t}) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n} a^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-i 2n t}) dt \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1} a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-i(2n+1)t}) dt \end{aligned}$$

donc d'après la question (d) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(e^{-i n t}) dt = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1} a^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

et finalement :

$$\boxed{\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a e^{-i t}} dt\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}}.$$

- (f) i. Pour $x \geq 0$, l'application $t \mapsto e^{-x \cos t}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (par composition de $t \mapsto -x \cos t$ et de la fonction exponentielle).

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'application $x \mapsto e^{-x \cos t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (car du type $x \mapsto e^{\omega x}$).

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $x \geq 0$, $0 \leq e^{-x \cos t} \leq 1$ car $\cos t \geq 0$, et la fonction continue $t \mapsto 1$ est intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le cours, on en déduit que

l'application F est continue sur $[0, +\infty[$.

Puisqu'on intègre sur un segment, on aurait aussi pu arguer de la continuité de l'application $(x, t) \mapsto e^{-x \cos t}$ sur $[0, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par composition avec l'exponentielle du produit des fonctions $(x, t) \mapsto -x$ et $(x, t) \mapsto t \mapsto \cos t$.

ii. L'application $t \mapsto -a \cos t$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, car $a > 0$. Par composition avec la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

l'application considérée est croissante sur $[0, \pi/2]$.

iii. On a vu précédemment que $e^{-a \cos t} \leq 1$ pour $a > 0$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc a fortiori¹ pour $t \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par intégration :

$$\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \cos t} dt \leq \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} dt$$

ou encore :

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \cos t} dt \leq \frac{1}{\sqrt{a}}.}$$

iv. On peut alors écrire :

$$0 \leq F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-a \cos t} dt + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \cos t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-a \cos t} dt + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Mais d'après ii, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$:

$$e^{-a \cos t} \leq e^{-a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)} = e^{-a \sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}$$

donc par intégration :

$$0 \leq F(a) \leq \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) e^{-a \sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Comme $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on a

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} a \sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{a} = +\infty$$

donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) e^{-a \sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 0$$

et par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = 0.}$$

(g) On écrit :

$$-a e^{-it} = -a \cos t + i a \sin t$$

donc $\left|e^{-a e^{-it}}\right| = \left|e^{-a \cos t} e^{i a \sin t}\right|$ soit

$$\boxed{\left|e^{-a e^{-it}}\right| = e^{-a \cos t}.}$$

On a aussi :

$$e^{-a e^{-it}} = e^{-a \cos t} \cos(a \sin t) + i e^{-a \cos t} \sin(a \sin t)$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(e^{-a e^{-it}}\right) = e^{-a \cos t} \cos(a \sin t) \text{ et } \operatorname{Im}\left(e^{-a e^{-it}}\right) = e^{-a \cos t} \sin(a \sin t).}$$

1. sous la condition $0 < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}$, soit $a > \frac{4}{\pi^2}$, que l'on supposera remplie dans tout ce qui suit

(h) On écrit :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}} \operatorname{Re} \left(e^{-a e^{-i t}} \right) dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}} \left| \operatorname{Re} \left(e^{-a e^{-i t}} \right) \right| dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \operatorname{Re} \left(e^{-a e^{-i t}} \right) \right| dt$$

car on intègre une fonction positive, et comme $\operatorname{Re} \left(e^{-a e^{-i t}} \right) = e^{-a \cos t}$, on a bien établi :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}} \operatorname{Re} \left(e^{-a e^{-i t}} \right) dt \right| \leq F(a).$$

Puisque $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = 0$, il en découle que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}} \operatorname{Re} \left(e^{-a e^{-i t}} \right) dt = 0.$$

(i) D'après les questions 2.(c) et 3.(e) :

$$\int_0^a \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Re} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a e^{-i t}} dt \right).$$

On peut écrire :

$$\operatorname{Re} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a e^{-i t}} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-a e^{-i t}} dt \right) + \operatorname{Re} \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a e^{-i t}} dt \right)$$

les deux termes de droite tendant vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$, le premier d'après la question précédente, le deuxième du fait que :

$$\left| \operatorname{Re} \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a e^{-i t}} dt \right) \right| \leq \left| \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a e^{-i t}} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{-a e^{-i t}} \right| dt \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

d'après les questions (g) et (f) iii.

Comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin t}{t} dt$$

on retrouve bien que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$