Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II, série TSI, concours CCP 2005

Partie I. La méthode des traces

1. a/ Le cours indique que :

$$\boxed{a_0 = (-1)^n}$$

b/ $A \in M_n(\mathbb{C})$: donc χ_A est scindé et les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A. Donc :

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)}$$

c/ L'on sait que :

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = (-1)^{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \\ a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \end{array}}$$

2. Posons $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & . & . & . \\ & \lambda_2 & & \\ & (0) & . & . \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Alors $\forall p \in \mathbb{N},\ T^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & . & . & . \\ & \lambda_2^p & & \\ & (0) & . & . \\ & & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$ et :

$$\boxed{\mathrm{tr}(T^p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p}$$

.

Sachant qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $T = P^{-1}AP$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $T^p = P^{-1}A^pP$. D'où $\mathrm{tr}(T^p) = \mathrm{tr}(P^{-1}A^pP) = \mathrm{tr}(A^pPP^{-1}) = \mathrm{tr}(A^p)$. On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{tr}(A^p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p}$$

.

3. Comme $\chi_A(\lambda) = a_0 \prod\limits_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k)$. On a alors $\chi_A'(\lambda) = a_0 \sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} (\lambda - \lambda_i)$. D'où, pour $\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\chi_A'(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} (\lambda - \lambda_i)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} (\lambda - \lambda_i)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_k}
\end{aligned}$$

On a montré, pour $\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$:

$$\boxed{\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_k}}$$

4. Pour $\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, $\begin{aligned}\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}} \Rightarrow\end{aligned}$

D'où, si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda}\right| < 1$, $\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^p$, ce qui signifie :

$$\boxed{|\lambda| > \max\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|\} \Rightarrow \frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^p}$$

et $\underline{m = \max\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|\}}$.

5. D'où, pour $|\lambda| > m = \max\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|\}$, $\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^p$ (car l'application qui à une série convergente, associe sa somme, est une forme linéaire)

D'où, pour $|\lambda| > m$,

$$\boxed{\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^p)}{\lambda^p}}$$

6. Pour $\lambda = 0$,
$na_0 + (n-1)a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} = na_0$ et
$(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n) \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^p)\lambda^p = a_0\mathrm{tr}(A^0) = a_0\mathrm{tr}(I_n) = na_0$.
D'où, pour $\lambda = 0$,
$\underline{na_0 + (n-1)a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} = (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n) \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^p)\lambda^p}$

Si $\lambda \neq 0$ et $\frac{1}{|\lambda|} > m$, on peut substituer $\frac{1}{\lambda}$ à λ dans la formule démontrée en 5. On obtient :

$$\begin{aligned}\chi'_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) \lambda \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^p)\lambda^p \Leftrightarrow \\ \frac{na_0}{\lambda^{n-1}} + (n-1)\frac{a_1}{\lambda^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} &= \left(\frac{a_0}{\lambda^n} + \cdots + a_n\right) \lambda \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^p)\lambda^p \Leftrightarrow \\ na_0 + (n-1)a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} &= (a_0 + \cdots + a_n\lambda^n) \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^p)\lambda^p \\ &\text{en multipliant les 2 membres par } \lambda^{n-1}\end{aligned}$$

On a donc montré que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < \frac{1}{m}$ si $m \neq 0$,

$$\boxed{na_0 + (n-1)a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} = (a_0 + \cdots + a_n\lambda^n) \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^p)\lambda^p}$$

et $\underline{M = \frac{1}{m}}$ si $m > 0$. Si $m = 0$, l'identité précédente est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

7. Posons $M = +\infty$ si $m = 0$. Alors, l'identité précédente représente l'égalité pour tout $\lambda \in]-M, M[$ des sommes de 2 séries entières. D'après l'unicité du développement en série entière, on en déduit que les coefficients de λ^k pour $k \in \{0, \dots, n\}$ des 2 membres sont égaux. D'où :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \{0, \dots, n\},\ (n-k)a_k &= \sum_{i=0}^{k} a_i \mathrm{tr}(A^{k-i}) \Rightarrow \\
\forall k \in \{1, \dots, n\},\ (n-k)a_k &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i \mathrm{tr}(A^{k-i}) + a_k \mathrm{tr}(A^0) \Rightarrow \\
\forall k \in \{1, \dots, n\},\ (n-k)a_k &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i \mathrm{tr}(A^{k-i}) + n a_k \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \{1, \dots, n\},\ -k a_k = a_0 \mathrm{tr}(A^k) + a_1 \mathrm{tr}(A^{k-1}) + \ldots + a_{k-1} \mathrm{tr}(A)}$$

8. On sait que $a_0 = (-1)^n$. L'identité précédente permet pour $k = 1$ de calculer a_1 à partir de a_0, puis au rang 2, de calculer a_2 en fonction de a_0 et a_1, ... , au rang k, a_k en fonction de a_0, a_1, ..., a_{k-1} pour $k = 1, ..., n$.

On obtient ainsi le polynôme caractéristique de A.

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est indépendant du corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de ses coefficients : il vaut $\det(A - \lambda I_n)$. Donc :

l'expression du polynôme obtenue à partir de la formule des traces est encore valable.

Partie II. Mise en place de l'algorithme

1. Soient A et B 2 matrices de $M_n(\mathbb{C})$ et $C = AB$ leur produit. Alors :

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Donc pour chaque coefficient de C, il faut n multiplications et $n-1$ additions, ce qui donne $2n-1$ opérations. Comme il y a n^2 coefficients à calculer, on obtient $n^2(2n-1)$ opérations. Comme $n^2(2n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^3$,

$\boxed{\text{la complexité du produit de 2 matrices est de l'ordre de } n^3.}$

2. Soient A matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Alors $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ii}$. Le calcul de la trace demande donc $n-1$ additions et

$\boxed{\text{la complexité du calcul de la trace d'une matrice est de l'ordre de } n.}$

3. a/

```
♯ calcul de la trace de A
¿ t[1] :=sum('A[l,l]','l'=1..n) :
♯ C contient les puissances successives de A
¿ C :=evalm(A) :
¿ for k from 2 to n do
♯ B stocke une puissance de A afin de calculer la suivante dans C
¿ B :=evalm(C) ;
♯ calcul de C=AB
¿ for i from 1 to n do for j from 1 to n do
¿ C[i,j] :=0 ; for l from 1 to n do C[i,j] :=C[i,j]+A[i,l]*B[l,j] od ;
¿ od ;od ;
♯ calcul de la trace de A^k
¿ t[k] :=sum('C[l,l]','l'=1...n) ;
¿ od ;
¿ print(seq(t[k],k=1..n)) ;
```

3. b/ On a vu que le produit de 2 matrices demande $(2n-1)n^2$ opérations. Dans l'algorithme précédent, cette opération en demande, en fait, $2n^3$, réalisée $n-1$ fois (pour calculer $A^2, ..., A^n$).

Donc le calcul de $A^2, ..., A^n$ demande $2n^3(n-1)$ opérations. Il faut y rajouter n calculs de traces, donc $n(n-1)$ additions. On obtient en tout $2n^3(n-1)+n(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^4$ opérations.

$\boxed{\text{La complexité du programme conçu au a/ est donc de l'ordre de } n^4.}$

4. a/
¿ a[0] :=(-1)∧n :
¿ for k from 1 to n do a[k] :=-1/k*(sum('a[i]*t[k-i]','i'=0...k-1)) od :
¿ print(seq(a[k],k=0..n)) ;
Les calculs résultent de l'application directe de la formule démontrée dans la question I. 7.

b/ $\underline{a_n = \det(A) \text{ et si } a_n \neq 0,\ A \in GL_n(\mathbb{C})}$;

c/ On a vu que pour le calcul des traces, il fallait $2n^3(n-1)+n(n-1)$ opérations.
Pour le calcul des a_k, l'on a k multiplications (a_i par $\text{tr}(A^{k-i})$, plus $k-1$ additions et une division par k, ce qui donne $2k$ opérations. k variant de 1 à n, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$ opérations.
Finalement, après $2n^3(n-1)+n(n-1)+n(n+1)$ opérations :
$\boxed{\text{la complexité totale de l'algorithme des traces est encore de l'ordre de } n^4.}$

d/ Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Notons $P(n)$ le nombre d'opérations nécessaire pour calculer son déterminant par la méthode classique.
L'on sait que :
$\det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\Delta_{i1}$ où Δ_{ij} représente le mineur de A relatif à la ligne i et la colonne j.
Donc il y a $nP(n-1)$ opérations de calcul des mineurs, plus n multiplications, plus $n-1$ additions ou soustractions, ce qui donne en tout $P(n) = nP(n-1)+2n-1$ opérations pour calculer $\det(A)$.
En posant $u(n) = \dfrac{P(n)}{n!}$, on obtient : $u(n) = u(n-1) + \dfrac{2}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$ et en sommant membre à membre, pour k variant de 2 à n :
$u(n) = u(1) + 2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k!} - \sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k!}$.
Comme $P(1)=0,\ u(1)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = 2(e-1)-(e-2) = e$.
Cela montre en particulier que $P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e.n!$.
Donc la complexité de la méthode "naïve" est de l'ordre de $n!$.
En fait chaque produit dans le calcul de χ_A est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et il faut l'ordonner pour pouvoir en récupérer les coefficients, ce qui augmente encore le nombre d'opérations.
Comme $n^4 = o_{+\infty}(n!)$, il est évident que la méthode des traces est plus économique en calculs.

Partie III

1. Exemple 1.
a/ Un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est défini de manière unique par l'image d'une base de $\mathbb{R}^n$.
La matrice de f dans la base B est alors :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & & 0 \\ 0 & 1 & . & & . \\ . & & . & . & . \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\text{Im } f = Vect\{f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})\} \Rightarrow$

$$\boxed{\text{Im } f = Vect\{\overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})\}}$$

D'où le rang de f est $n-1$, la dimension de Ker f est 1 et comme $\overrightarrow{e_n} \in \text{Ker } f$,

$$\boxed{\text{Ker } f = Vect\{\overrightarrow{e_n}\}}$$

b/ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & & & & \\ 1 & . & & (0) & \\ & . & . & & \\ & (0) & . & . & \\ & & & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n$ (matrice triangulaire)

c/ Comme, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\},\ k \in \mathbb{N},\ f^k(\overrightarrow{e_i}) = \begin{cases} \overrightarrow{e_{i+k}} & \text{si } i+k \leq n \\ \overrightarrow{0} & \text{si } i+k > n \end{cases}$ et

$f^k(\overrightarrow{e_n}) = \overrightarrow{0},\ tr(A^k) = 0.$
On a alors $a_0 = (-1)^n$ et
$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ a_k = -\dfrac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} a_i \underbrace{\text{tr}(A^{k-i})}_{0} = 0.$

On retrouve :

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n}$$

2. Exemple 2.
La matrice de f dans la base B est alors :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & & 0 \\ 0 & 1 & . & & . \\ . & & . & . & . \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\text{Im } f = Vect\{f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})\} \Rightarrow$

$$\boxed{\text{Im } f = Vect\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})\} = \mathbb{R}^n}$$

D'où le rang de f est n et :

$$\boxed{\text{Ker } f = Vect\{\overrightarrow{0}\}}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & & & & 1 \\ 1 & . & & (0) & \\ & . & . & & \\ & (0) & . & . & \\ & & & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$

En développant suivant la première ligne, on obtient :

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & & & & 0 \\ 1 & . & & (0) & \\ & . & . & & \\ & (0) & . & . & \\ & & & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & & & \\ & . & . & (0) & \\ & & . & . & \\ & (0) & & . & -\lambda \\ & & & & 1 \end{vmatrix}.$

D'où, comme les 2 déterminants sont des déterminants de matrices triangulaires,

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n + (-1)^{n+1}}$$

En outre pour tout $(k,i) \in \times\{0,...,n\} \times \{1,...,n\},\ f^k(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_j}$ avec $j = i$ si $k = 0$ ou $k = n$ et $j \neq i$ sinon.

Donc $\text{tr}(A^0) = \text{tr}(A^n) = n$ et $\forall k \in \{1,...,n-1\},\ \text{tr}(A^k) = 0$.

On en déduit :

$a_0 = (-1)^n$

$\forall k \in \{1,...,n-1\},\ a_k = -\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i \underbrace{\text{tr}(A^{k-i})}_{0} = 0.$

$a_n = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i\ \text{tr}(A^{n-i}) = -\dfrac{1}{n}a_0\text{tr}(A^n) = (-1)^{n+1}.$

On retrouve :

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n + (-1)^{n+1}}$$

3. Exemple 3.

a/ L'on sait que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n,\ f(\overrightarrow{x}) =< \overrightarrow{x}|\overrightarrow{u} > \overrightarrow{u}$ et que

$$\boxed{\text{Im} f = Vect\{\overrightarrow{u}\}}$$

D'où <u>le rang de f est 1.</u>

Enfin $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n,\ f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow < \overrightarrow{x}|\overrightarrow{u} >= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{u}$. On obtient :

$$\boxed{\text{Ker } f = \{\overrightarrow{u}\}^{\perp}}$$

Dans une base B', formée de $\overrightarrow{u}$ et d'une base de $\{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$, f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & . \\ . & & & & \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$ et, comme la matrice est diagonale,

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & & & & \\ & -\lambda & & (0) & \\ & & . & & \\ & (0) & & . & \\ & & & & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)^{n-1}}$$

b/ $\forall j \in \{1,\ldots,n\},\ f(\overrightarrow{e_j}) =< \overrightarrow{e_j}|\overrightarrow{u} > \overrightarrow{u} = u_j\overrightarrow{u}$. D'où :

$$M_B(f) = A = \begin{pmatrix} u_1^2 & . & . & . & u_n u_1 \\ u_1 u_2 & & & & . \\ . & & & & \\ . & & & & . \\ u_1 u_n & . & . & . & u_n^2 \end{pmatrix} = (u_i u_j)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} = U^tU \text{ en posant } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}$$

On a alors $A^2 = U^tUU^tU = {}^tUUA = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) A = A$ (car $\overrightarrow{u}$ est unitaire). Donc :

$$\boxed{A^2 = A}$$

L'on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = A$ et $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(A) = 1$.

On a donc :
$a_0 = (-1)^n$
$a_1 = -a_0 = (-1)^{n+1}$
$a_2 = -\dfrac{1}{2}(a_0 + a_1) = 0$ et si l'on suppose que pour $2 \leq i \leq k < n,\ a_i = 0,\ a_{k+1} = -\dfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(\underbrace{a_0 + a_1}_{0} + \underbrace{a_2 + \ldots + a_k}_{0}) = 0$.
On retrouve :

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n + (-1)^{n+1}\lambda^{n-1} = (-1)^n\lambda^{n-1}(\lambda - 1)}$$

4. Une application.
a/ Pour $k \geq 1,\ a_k = -\dfrac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} a_i \ \mathrm{tr}(A^{k-i}) = 0$. D'où :

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n}$$

L'on en déduit que la seule valeur propre de A (racine de χ_A) est 0 d'ordre n.

La matrice A est alors trigonalisable et il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure, les valeurs propres figurant sur la diagonale :
$T = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \cdot & \\ (0) & & \cdot \\ & & 0 \end{pmatrix}$. Si l'on note f l'endomorphisme de matrice T dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, une récurrence simple montre que $f^k(\overrightarrow{e_k}) = \overrightarrow{0}$ et donc $\forall k \in \{1, ..., n\},\ f^n(\overrightarrow{e_k}) = \overrightarrow{0}$. Cela prouve $T^n = 0$ et comme $A = PTP^{-1}$,

$$\boxed{A^n = PT^nP^{-1} = 0}$$

b/ Soit $\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A)$, alors il existe $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. Cela prouve $A^n X = \lambda^n X = 0$. D'où $\lambda^n = 0$ $(X \neq 0) \Rightarrow \lambda = 0$.
Donc 0 est valeur propre d'ordre n de A.

c/ Supposons $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A^n = 0$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de A.
On a vu en b/ que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
On a vu en I. 2. que $\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr}(A^p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p$.
On en déduit que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{tr}(A^p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p = 0$.
Compte tenu de la question a/, on a montré :

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ A^n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \ldots = \mathrm{tr}(A^n) = 0}$$

$\Delta\Delta\Delta$

Rédigé par
Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal, 22000 St Brieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr