*Mines-Ponts 2006. Option Informatique.*

*Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)*

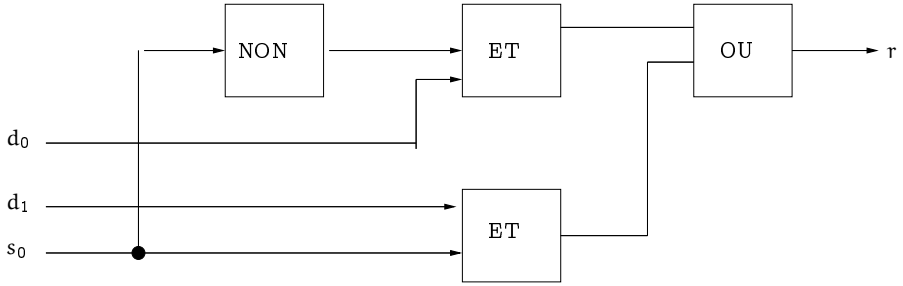
## 1. Problème de logique.

***Question 1.***

Il suffit de remplacer la porte "ET" du circuit synthétisant la constante 0 par une porte "OU" pour synthétiser la constante 1.

***Questions 2 et 3.***

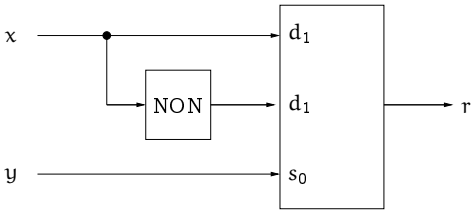
Si $s_0 = 0$ alors $r = d_0$ et sinon $r = d_1$ donc $r = \overline{s_0}d_0 + s_0d_1 = (\overline{s_0} \wedge d_0) \vee (s_0 \wedge d_1)$




***Questions 4 et 5.***

On reconnaît la fonction "xor" : $r = x \oplus y = \overline{x}y + x\overline{y} = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$

| x | y | r |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |




***Question 6.***

On peut réaliser la fonction logique ou de la même manière que dans la question 4 en fixant les entrées $d_0$, $d_1$, $d_2$ et $d_3$ respectivement à 0, 1,1,1. □

Pour un concentrateur $M_1$ on a vu que (avec les notations classiques du et et ou logique) : $r = \overline{s_0}d_0 + s_0d_1$.
Donc si $s_0 = x$, $d_1 = x$ et $d_0 = y$ il vient $r = \overline{x}y + xx = \overline{x}y + x$ qui est bien égal $y + x$ car r vaut 0 si et seulement si $x = 0$ et $\overline{x}y = 0$ i.e. si ets eulement si $x = y = 0$.
Ainsi on peut bien réaliser la fonction logique ou avec un seul concentrateur $M_1$ (sans aucune autre porte, mais avec un nœud duplicateur ce qui est bien permis par l'énoncé) en envoyant x sur $s_0$ et $d_1$ et y sur $d_0$. □

***Questions 7 et 8.***

Il est immédiat que toute fonction booléenne à n variables peut être réalisée à l'aide d'un concentrateur $M_n$ :

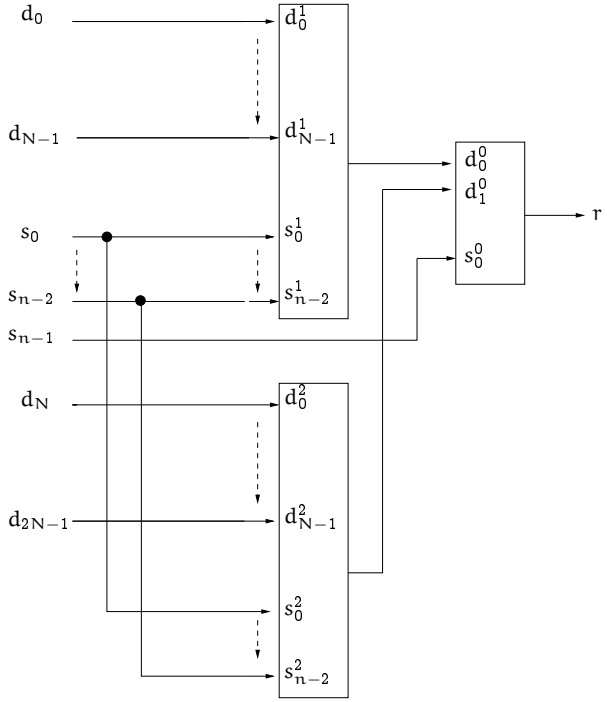


Il suffit pour cela d'envoyer $x_1$ sur l'entrée $s_0$, ..., $x_n$ sur l'entrée $s_{n-1}$ puis de fixer les entrées $d_i$ de manière adéquat. De manière précise $d_k$ avec $k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j 2^j$ est fixée à $f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ en notant $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ l'une des $2^n$ distributions de vérité de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Pour l'exemple de la question 4, la fonction est nulle sauf pour les distributions $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ et $(1,1,1)$ qui correspondent en binaire à (attention la lecture des bits se fait de droite à gauche) 5, 6 et 7. Il suffit donc de fixer les entrées de 0 à 4 à la valeur 0 et les entrées de 5 à 7 à la valeur 1.

***Question 9.***

En remarquant, en liaison avec la question précédente, que :
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x_n}\underbrace{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)}_{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} + x_n \underbrace{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)}_{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}$
ou (ce qui revient au même) en notant que (avec les notations de l'énoncé bas page 2) :
$k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j 2^j = \sum_{j=0}^{n-2} x_j 2^j$ ou $\sum_{j=0}^{n-2} x_j 2^j + 2^{n-1}$ suivant que $x_n = 0$ ou 1, on obtient, compte tenu de l'équation logique du concentrateur $M_1$, le schéma de montage suivant :




***Question 10.***

Il vient immédiatement que $\alpha_n = 2\alpha_{n-1} + 4$ donc (suite arithmético-géométrique fixant $-4$) $\alpha_n + 4 = 2^{n-1}(\alpha_1 + 4)$ soit $\alpha_n = 4(2^n - 1)$.

## *2. Problème d'algorithmique et de programmation.*

***Première partie : fonctions de base pour l'algorithme de Huffman.***

***Question 11.***

```
let indice_du_min F k =
  if (k > F.nb_noeuds) or (k <= 0)
    then failwith "Erreur dans indice_du_min"
  else let min = ref 0 in
    for i = 1 to k-1 do
      if F.table.(i).poids < F.table.(!min).poids then min := i else ()
    done;
    !min
;;
indice_du_min : Forêt -> int -> int = <fun>
```

***Question 12.***

```
#let échange v i j =
  if i <> j then let temp = v.(i) in
    v.(i) <- v.(j);
    v.(j) <- temp
  else ()
;;
échange : 'a vect -> int -> int -> unit = <fun>

#let deux_plus_petits F =
  if F.nb_arbres < 2 then failwith "Erreur dans deux_plus_petits !"
  else
    let min = indice_du_min F F.nb_arbres in
      échange F.table (F.nb_arbres - 1) min;
    let min = indice_du_min F (F.nb_arbres - 1) in
      échange F.table (F.nb_arbres - 2) min
;;
deux_plus_petits : Forêt -> unit = <fun>
```

***Question 13.***

L'algorithme est clair :

1/ on place les deux racines de plus petit poids en dernières positions (indices $a-1$ et $a$) de la partie réservée aux racines,

2/ on recopie la case d'indice $a-1$ en la case d'indice $n$ (où $n$ est le nombre de nœuds) qui contenait initialement le nœud vide,

3/ on modifie la case d'indice $a-1$ en lui attribuant la lettre '$-$', le poids somme des poids des deux racines de plus petit poids au départ, comme fils gauche le nœud d'indice $a$ et comme fils droit celui d'indice $n$,

4/ il reste à décrémenter le nombre de racines et à incrémenter le nombre de nœuds.



```
#let assemblage F =
  let a = F.nb_arbres-1 and n = F.nb_noeuds in
    deux_plus_petits F;
    F.table.(n) <- F.table.(a-1);
    F.table.(a-1) <- {lettre = '-';
                      poids = F.table.(a).poids + F.table.(a-1).poids;
                      fg = a;
                      fd = n};
    F.nb_arbres <- a;
    F.nb_noeuds <- n+1
;;
assemblage : Forêt -> unit = <fun>
```

Vérification avec l'exemple donné (on prend ici MAX=10) :

```
let forêt1 =
  let table_forêt1 = make_vect MAX noeud_vide in
    table_forêt1.(0) <- {lettre = 'g'; poids = 10; fg = -1; fd = 6};
    table_forêt1.(1) <- {lettre = 'a'; poids = 20; fg = 4; fd = 3};
    table_forêt1.(2) <- {lettre = 'b'; poids = 13; fg = -1; fd = -1};
    table_forêt1.(3) <- {lettre = 'e'; poids = 9; fg = 5; fd = -1};
    table_forêt1.(4) <- {lettre = 'f'; poids = 15; fg = -1; fd = -1};
    table_forêt1.(5) <- {lettre = 'c'; poids = 12; fg = -1; fd = -1};
    table_forêt1.(6) <- {lettre = 'd'; poids = 8; fg = -1; fd = -1};
    {nb_arbres = 3; nb_noeuds = 7; table = table_forêt1}
;;

assemblage forêt1;;
- : unit = ()

forêt1;;
- : Forêt =
 {nb_arbres = 2; nb_noeuds = 8;
  table =
   [|{lettre = 'a'; poids = 20; fg = 4; fd = 3};
     {lettre = '-'; poids = 23; fg = 2; fd = 7};
     {lettre = 'g'; poids = 10; fg = -1; fd = 6};
     {lettre = 'e'; poids = 9; fg = 5; fd = -1};
     {lettre = 'f'; poids = 15; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = 'c'; poids = 12; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = 'd'; poids = 8; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = 'b'; poids = 13; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = '\000'; poids = 0; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = '\000'; poids = 0; fg = -1; fd = -1}|]}
```

## *Deuxième partie : propriétés pour l'algorithme de Huffman.*

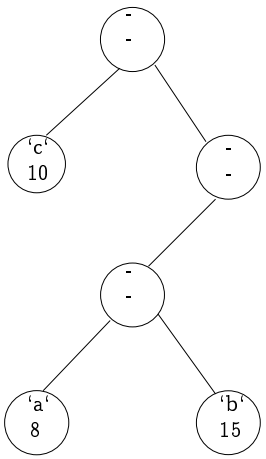
***Question 14.***

Soit un H_arbre A optimal. Supposons que A possède un noeud interne n admettant un seul fils m (pouvant être une feuille ou un noeud interne). Alors en remplaçant n par m on obtient un H_arbre ayant les mêmes feuilles et d'évaluation strictement plus petite (la hauteur a diminué d'une unité pour toutes les feuilles issues de n donc le gain d'évaluation est $p > 0$ où p est la somme des poids (strictement positifs) des feuilles issues du noeud n). Contradiction avec le fait que A soit minimal.

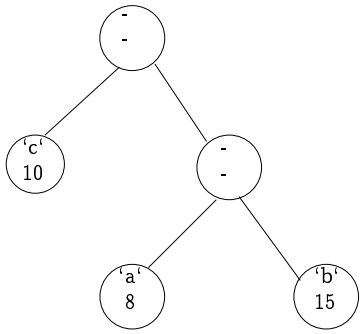
Ainsi un arbre de Huffman optimal est complet.

***Question 15.***

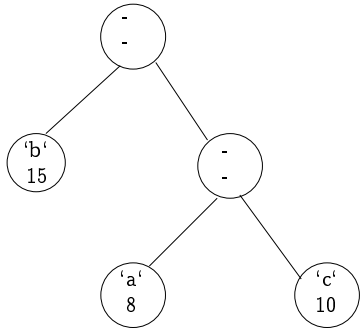
Immédiat sinon en échangeant les feuilles $f_1$ et $f_2$ on obtiendrait un arbre B de mêmes feuilles que A et d'évaluation strictement plus petite, ce qui est en contradiction avec le fait que A soit optimal.



H_arbre A_ex



H_arbre B_ex
Gain d'évaluation : 23



H_arbre B_ex
Nouveau gain d'évaluation : 5

***Question 16 et 17.***

Soit un H_arbre A et deux feuilles $f_1$ et $f_2$ de plus petits poids avec $\text{poids}(f_1) \leqslant \text{poids}(f_2)$.
Soit B un H_arbre optimal de même feuilles (donc complet).
Notons qu'un tel arbre existe bien car l'ensemble des évaluations des H_arbres de mêmes feuilles que A est un ensemble non vide d'entiers naturels donc admet un plus petit élément.

- Supposons que $f_1$ ne soit pas de hauteur maximale dans B et soit alors $f'_1$ une feuille de B de hauteur maximale.
  La contribution des feuilles $f_1$ et $f'_1$ à l'évaluation de B est $h(f_1)\text{poids}(f_1) + h(f'_1)\text{poids}(f'_1)$.
  En échangeant ces deux feuilles on obtient un arbre B′ pour lequel la contribution est $h(f_1)\text{poids}(f'_1) + h(f'_1)\text{poids}(f_1)$.
  Donc $e(B) - e(B') = \Big(h(f_1) - h(f'_1)\Big)\Big(\text{poids}(f_1) - \text{poids}(f'_1)\Big) \geqslant 0$ puisque $f_1$ est de poids minimal et $f'_1$ de hauteur maximale.
  Comme B est optimal, cette quantité est nulle. Ainsi B′ est également optimal et $f_1$ en est bien une feuille de hauteur maximale.

Ainsi il existe toujours un arbre optimal C (soit B soit B′) dont $f_1$ est une feuille de hauteur maximale.

- Comme C est complet (car optimal) le père de $f_1$ admet un autre fils $f'_2$ qui est un nœud de même hauteur que $f_1$ donc maximale donc qui est une feuille (sinon il admettrait une feuille descendante de hauteur strictement plus grande).
  Si $f_2$ est différente de $f'_2$, le même raisonnement que précédemment montre qu'en échangeant les feuilles $f_2$ et $f'_2$ on obtient un arbre C′ encore optimal.
- En conclusion, il existe toujours un arbre optimal de même feuilles que A dans lequel $f_1$ et $f_2$ sont deux feuilles sœurs et de hauteur maximale.

***Question 18.***

Il est immédiat que $e(B) = e(A) - (p_1 + p_2)$.

***Question 19.***

- Supposons A non optimal et soit A′ de mêmes feuilles et d'évaluation strictement plus petite. Soit B′ obtenu à partir de A′ par coupe de $f_1$ et $f_2$. Alors B′ a les mêmes feuilles que B et pour évaluation $e(A') - (p_1 + p_2) < e(B)$ d'après la question précédente. Ce qui prouve que B n'est pas optimal.
- Supposons B non optimal et soit B′ de mêmes feuilles et d'évaluation strictement plus petite. Soit A′ obtenu à partir de B′ en remplaçant la feuille n par un nœud ayant pour fils les feuilles $f_1$ et $f_2$. Alors A′ a les mêmes feuilles que A et pour évaluation $e(A') = e(B') + (p_1 + p_2) < e(A)$ d'après la question 18. Ce qui prouve que A n'est pas optimal.
- Ainsi A est optimal si et seulement si B l'est.

## *Troisième partie : l'algorithme de Huffman.*

***Question 20.***

Le seul découpage possible est (100)(00)(11)(011) donc le texte est "face".

***Question 21.***

On vérifie facilement que le codage donné en exemple est préfixe.

Le fait que le codage soit préfixe implique clairement que l'application C : TƆ− > C(T) est injective donc que le décodage est possible !
Sinon par exemple avec "a" codé en 0, "b" codé en 1 et "c" en 01, les textes "ab" et "c" auraient le même code !

***Question 22.***

Il est immédiat que la longueur de C(T) est égale à e(A) où A est le H_arbre représentant le codage.

***Question 23.***

Soit A l'arbre produit par l'algorithme de Huffman à partir de la forêt constituée des feuilles des caractères "occurencés" du texte T. Pour prouver que le codage associé à cet arbre est optimal, il suffit, compte tenu de la question précédente, de prouver que A est optimal parmi les H_arbres ayant pour feuilles les feuilles qui constituent la forêt de départ.
On raisonne pour cela par récurrence sur le nombre k de feuilles de la forêt de départ.
La propriété est évidemment vraie pour $k = 2$. Supposons qu'elle soit vraie pour $k \leqslant n - 1$ (avec $n \geqslant 3$) et considérons une forêt F de n feuilles.

Soient $f_1$ et $f_2$ les deux feuilles de plus petit poids de F (au sens de la question 12) et soit F′ la forêt de $n-1$ feuilles composée des mêmes feuilles que F sauf $f_1$ et $f_2$ remplacée par une unique feuille $\alpha$ de poids $\text{poids}(f_1)+\text{poids}(f_2)$.
Par hypothèse de récurrence l'arbre $A'$ obtenu à partir de la forêt F′ par l'algorithme de Huffman est optimal parmi les arbres ayant pour feuilles les feuilles constituant F′.
Or la première étape de l'algorithme de Huffman appliqué à la forêt F consiste à remplacer les feuilles $f_1$ et $f_2$ par un nœud ayant $f_1$ et $f_2$ pour fils.
Il en découle que $A'$ est obtenu à partir de $A$ en simplifiant $A$ par coupe de $f_1$ et $f_2$.
Comme $A'$ est optimal, la question 19 prouve que $A$ est bien optimal. □

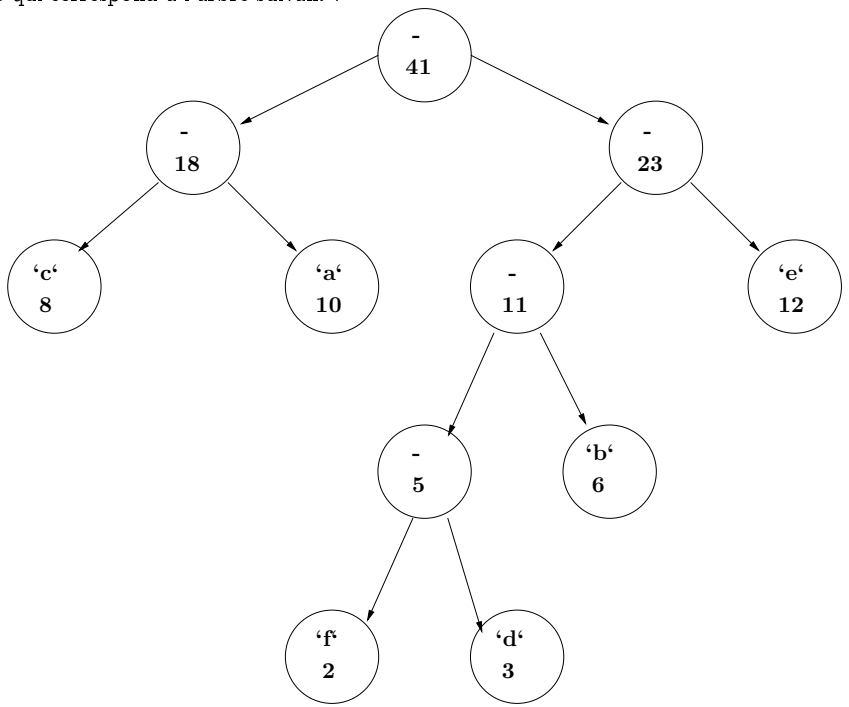
***Question 24.***

On peut facilement appliquer l'algorithme de Huffman à la main. On peut aussi demander au calculateur de faire le travail :

```
let Huffam F =
  while F.nb_arbres >= 2 do assemblage F done;
  F
;;
Huffam : Forêt -> Forêt = <fun>

let MAX = 13;;

let forêt =
  let table_forêt = make_vect MAX noeud_vide in
    table_forêt.(0) <- {lettre = 'a'; poids = 10; fg = -1; fd = -1};
    table_forêt.(1) <- {lettre = 'b'; poids = 6; fg = -1; fd = -1};
    table_forêt.(2) <- {lettre = 'c'; poids = 8; fg = -1; fd = -1};
    table_forêt.(3) <- {lettre = 'd'; poids = 3; fg = -1; fd = -1};
    table_forêt.(4) <- {lettre = 'e'; poids = 12; fg = -1; fd = -1};
    table_forêt.(5) <- {lettre = 'f'; poids = 2; fg = -1; fd = -1};
    {nb_arbres = 6; nb_noeuds = 6; table = table_forêt}
;;

Huffamn forêt;;
- : Forêt =
 {nb_arbres = 1; nb_noeuds = 11;
  table =
   [|{lettre = '-'; poids = 41; fg = 1; fd = 10};
     {lettre = '-'; poids = 18; fg = 3; fd = 8};
     {lettre = '-'; poids = 11; fg = 4; fd = 7};
     {lettre = 'c'; poids = 8; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = '-'; poids = 5; fg = 5; fd = 6};
     {lettre = 'f'; poids = 2; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = 'd'; poids = 3; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = 'b'; poids = 6; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = 'a'; poids = 10; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = 'e'; poids = 12; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = '-'; poids = 23; fg = 2; fd = 9};
     {lettre = '\000'; poids = 0; fg = -1; fd = -1};
     {lettre = '\000'; poids = 0; fg = -1; fd = -1}|]}
```



Ce qui correspond à l'arbre suivant :




Lequel correspond au codage suivant de l'alphabet pondéré :

| caractère | code |
|---|---|
| 'a' | 01 |
| 'b' | 101 |
| 'c' | 00 |
| 'd' | 1001 |
| 'e' | 11 |
| 'f' | 1000 |

*FIN*