

Partie I –

1 Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ car la base B est orthonormale, soit

$$(x | y) = {}^t X Y = {}^t Y X.$$

2 Projecteur orthogonal sur H :

a C'est un résultat du cours : si $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormale de H, alors

$$\forall z \in F \quad p(z) = \sum_{i=1}^k (z | e_i) e_i$$

b Matrice de p dans une base orthonormale de F :

i $\forall z \in F \quad p(z) = \sum_{i=1}^k (z | e_i) e_i$ a pour matrice $M(p)Z = \sum_{i=1}^k ({}^t E_i Z) E_i$ Comme ${}^t E_i Z$ est un réel,

on peut permuter les termes : $M(p)Z = \sum_{i=1}^k E_i ({}^t E_i Z)$ Or E_i est une matrice de taille $(n, 1)$, ${}^t E_i$

de taille $(1, n)$ et Z de taille $(n, 1)$; le produit $E_i {}^t E_i Z$ est défini (et le produit des matrices est une opération associative) : $\sum_{i=1}^k E_i {}^t E_i Z = M(p) Z$

ii $\forall z \in F \quad p(z)$ a pour matrice $\left(\sum_{i=1}^k E_i {}^t E_i \right) Z$. Or la matrice d'une application linéaire,

relativement à une base donnée, est unique : $M(p) = \sum_{i=1}^k E_i {}^t E_i$

c $\forall z \in F \quad \exists ! (y, t) \in H \times H^\perp / z = y + t$, où $H^\perp$ est l'orthogonal de H dans F (et $F = H \oplus H^\perp$)
Alors $p(z) = y$, $\|p(z)\|^2 = \|y\|^2$ et (théorème de Pythagore) $\|z\|^2 = \|y\|^2 + \|t\|^2 \geq \|y\|^2$, ce qui permet de conclure : $\|z\| \geq \|p(z)\|$.

3 Etude d'un exemple.

a M est une matrice symétrique réelle, on calcule $M^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M$: M est la

matrice d'un projecteur p. Comme M est symétrique et la base est orthonormale, l'endomorphisme p est symétrique. Conséquence (on utilise le rappel donné en début d'énoncé, mais que vous deviez connaître) : p est un projecteur orthogonal.

b On peut remarquer, en notant (v_1, v_2, v_3, v_4) la base canonique, que $p(v_3) = -p(v_1)$ et $p(v_4) = -p(v_2)$. Ainsi $\text{rg}(M) = \text{rg}(p(v_1), p(v_2), p(v_3), p(v_4)) = \text{rg}(p(v_1), p(v_2)) = 2$ (les deux vecteurs ne sont pas proportionnels).

Conclusion : $\text{rg}(M) = \text{rg}(p) = 2$ et (formule du rang) $\dim(\text{Ker}(p)) = 2$.

i $\text{Im}(p)$ a pour base $\{p(v_1), p(v_2)\}$, qui est une famille orthogonale. Une base orthonormale

de $\text{Im}(p)$ est obtenue en normant ces vecteurs : $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

ii En utilisant les remarques précédentes, $v_1 + v_3$ et $v_2 + v_4$ sont des vecteurs de $\text{Ker}(p)$, formant une famille libre (ils ne sont pas proportionnels), donc une base de $\text{Ker}(p)$. Ils sont

orthogonaux. Là encore, il suffit de les normer pour obtenir une base orthonormale de $\text{Ker}(p)$,

$$\text{ce qui donne : } \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4 Valeurs propres de por :

a Le vecteur u vérifie : $(\text{por})(u) = \lambda u$ et puisque $\lambda \neq 0$, $u = \frac{1}{\lambda} p(r(u)) \in \text{Im}(p) = H$. En particulier $p(u) = u$ et $p(r(u) - \lambda u) = \lambda u - \lambda u = 0_E$: $r(u) - \lambda u \in \text{Ker}(p) = H^\perp$

b Comme $u \in H$ et $r(u) - \lambda u \in H^\perp$, $(r(u) - \lambda u | u) = 0$ ie $(r(u) | u) = \lambda \|u\|^2$.
Par définition de r , projecteur orthogonal de F sur K : u s'écrit de manière unique $u = r(u) + z$, où $z \in K^\perp$ et $(r(u) | u) = (r(u) | r(u) + z) = \|r(u)\|^2$.
On obtient bien l'égalité : $\|r(u)\|^2 = \lambda \|u\|^2$

c Puisque u est non nul, $\|u\|^2 > 0$: $\lambda = \frac{\|r(u)\|^2}{\|u\|^2} \geq 0$.

On applique la question 2c à r , projecteur orthogonal : $\lambda \leq 1$.

5 Hypothèse : p et r commutent.

a Alors $(\text{por})^2 = p^2 \circ r^2 = \text{por}$: por est un projecteur.
La matrice de por dans la base orthonormale de F est $P.R$, où P et R sont symétriques, et commutent. Alors ${}^t(PR) = {}^tR {}^tP = RP$ puisque P et R sont symétriques
 $= PR$ puisque P et R commutent.

La matrice de por dans une base orthonormale est symétrique (réelle) : por est un endomorphisme symétrique et un projecteur, ie un projecteur orthogonal.

Remarque : on peut également montrer directement que por est un endomorphisme symétrique en calculant pour tout couple (x, y) d'éléments de E :

$$\begin{aligned} ((\text{por})(x) | y) &= (p(r(x)) | y) = (r(x) | p(y)) \text{ car } p \text{ est symétrique} \\ &= (x | r(p(y))) \text{ car } r \text{ est symétrique} \\ &= (x | (\text{por})(y)) \text{ car } p \text{ et } r \text{ commutent.} \end{aligned}$$

b Puisque por est un projecteur, $\text{sp}(\text{por}) \subset \{0, 1\}$ et por est diagonalisable. Puisque por est non nul, il y a donc une valeur propre non nulle : 1.

0 est-elle valeur propre ? si 0 n'est pas valeur propre, alors le projecteur por n'a qu'une seule valeur propre, 1, et $\text{por} = \text{id}_F$; p est un endomorphisme inversible de F , ce qui n'est pas possible car son image : H , est incluse strictement dans F . Conclusion : 0 est valeur propre de por et $\text{sp}(\text{por}) = \{0, 1\}$.

c Comparaison des noyaux et images :

i Soit $y \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(r)$; alors $y \in \text{Im}(p)$ et $p(y) = y$; de même $y \in \text{Im}(r)$ et $r(y) = y$.
Conséquence : $(\text{por})(y) = p(y) = y$: $y \in \text{Im}(\text{por})$. Ainsi $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(r) \subset \text{Im}(\text{por})$.

Réciproquement : soit $y \in \text{Im}(\text{por})$; $\exists x \in F$ / $y = (\text{por})(x) = p(r(x)) \in \text{Im}(p)$ et de même (p et r commutent) $y = r(p(x)) \in \text{Im}(r)$. Ainsi $\text{Im}(\text{por}) \subset \text{Im}(p) \cap \text{Im}(r)$

Conclusion : $\text{Im}(\text{por}) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(r)$.

- ii Soit $x \in \text{Ker}(p) + \text{Ker}(r)$; alors $\exists (y, z) \in \text{Ker}(p) \times \text{Ker}(r) / x = y + z$.
 $(\text{por})(x) = (\text{por})(y) + (\text{por})(z) = r(p(y)) + p(r(z)) = 0_E : x \in \text{Ker}(\text{por})$. La 1° inclusion est prouvée.

Réciproquement : soit $x \in \text{Ker}(\text{por})$.

On veut écrire $x = a + b$, $a \in \text{Ker}(p)$ et $b \in \text{Ker}(r)$. Or $p(r(x)) = 0_E$ donc $r(x) \in \text{Ker}(p)$; on essaie $a = r(x)$; alors $b = x - r(x)$. Vérification : $a \in \text{Ker}(p)$ et

$r(b) = r(x - r(x)) = r(x) - r^2(x) = 0_E$ car r est un projecteur : $b \in \text{Ker}(r)$.

Conséquence $x \in \text{Ker}(p) + \text{Ker}(r)$. La 2° inclusion est prouvée, et l'égalité avec elle.

6 Utilisation de matrices par blocs :

- a P et R sont les matrices de projecteurs orthogonaux dans une base orthonormale, ce qui signifie que :

i P et R sont donc symétriques ; ainsi ${}^tR = R$ équivaut à ${}^tA = A$, ${}^tC = B$, ${}^tB = C$ et ${}^tD = D$.

ii $P^2 = P$, ce qui est vérifié, et $R^2 = R$. Comme $R^2 = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix}$, on obtient les

égalités : $A^2 + BC = A$, $AB + BD = B$, $CB + D^2 = D$. Toutes les égalités demandées ont été trouvées.

- b Méthode : une démonstration circulaire.

i Hypothèse : $\text{sp}(\text{por}) \subset \{0, 1\}$. La matrice de por est $PR = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; le spectre de por est

donc formé de 0 et des valeurs propres de A. Ainsi $\text{sp}(A) \subset \{0, 1\}$

Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable dans une base orthonormale.

Soit $(f_1, \dots, f_k)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^k$ formée de vecteurs propres de A, $(X_1 \dots, X_k)$ les matrices colonnes associées à ces vecteurs dans la base de départ.

$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad AX_i = \lambda_i X_i, \lambda_i \in \{0, 1\}$

On utilise : $A^2 + BC = A : \lambda_i^2 X_i + BCX_i = \lambda_i X_i$ et comme $\lambda_i^2 = \lambda_i : BCX_i = 0$

Puisque $(X_1 \dots, X_k)$ est une base de $M_{k,1}(\mathbb{R})$ $BC = 0 = {}^tCC$.

- ii On suppose ${}^tCC = 0$. Deux méthodes possibles :

(1) si $C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n-k, 1 \leq j \leq k}$, tCC est une matrice de taille (k, k) dont le terme général est $\gamma_{i,j} =$

$$\sum_{p=1}^{n-k} c_{p,i} c_{p,j} ; \text{ pour } i = j \quad \gamma_{i,i} = \sum_{p=1}^{n-k} c_{p,i}^2 = 0 \text{ puisque } {}^tCC = 0 \text{ Comme les nombres } c_{p,i} \text{ sont des}$$

réels : $\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \forall p \in \{1, \dots, n-k\} \quad c_{p,i} = 0$ ie $C = 0$

(2) ou bien : $\forall Y \in \mathbb{R}^k \quad {}^tY {}^tCC Y = \|CY\|^2 = 0$ car ${}^tCC = 0$.

Ainsi $\forall Y \in \mathbb{R}^k \quad CY = 0$, ce qui signifie que $C = 0$.

- iii On suppose $C = 0$; alors $B = {}^tC = 0$, $R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et $PR = RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : p$ et r

commutent.

- iv On suppose que p et r commutent. Alors (question 5.a) por est un projecteur orthogonal et pour tout projecteur : $\text{sp}(\text{por}) \subset \{0, 1\}$

Partie II –

1 Plusieurs méthodes possibles :

- a Utilisation directe du cours : $\min \{ \|f(x) - v\|, x \in E \} = \min \{ \|y - v\|, y \in \text{Im}(f) \} = \|y_0 - v\|$
 où y_0 est le projeté orthogonal de v sur $\text{Im}(f)$.
 Comme $y_0 \in \text{Im}(f)$, $\exists x_0 \in E / y_0 = f(x_0)$ et $v = f(x_0) + z$

- b Démonstration : soit $v \in F$; $\exists ! (y, z) \in \text{Im}(f) \times \text{Im}(f)^\perp / v = y + z$.
Puisque $y \in \text{Im}(f) \exists x_0 \in E / y = f(x_0)$.

$\forall x \in E \quad \|f(x) - v\|^2 = \|f(x) - f(x_0) - z\|^2 = \|f(x - x_0) - z\|^2$ On peut appliquer le théorème de Pythagore puisque $f(x - x_0) \in \text{Im}(f)$ et $z \in \text{Im}(f)^\perp$:

$$\|f(x) - v\|^2 = \|f(x - x_0)\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|f(x_0) - v\|^2$$

Ainsi $\{\|f(x) - v\|, x \in E\}$ admet un minimum qui est $\|f(x_0) - v\|$. Ce minimum est atteint pour tout vecteur x tel que $\|f(x - x_0)\|^2 = 0$, ie pour tout vecteur x tel que $f(x) = f(x_0)$ ie $v = f(x) + z, z \in \text{Im}(f)^\perp$

- 2 Soit $x_1 \in E$ tel que $\|f(x_0) - v\| = \|f(x_1) - v\|$. En remplaçant x par x_1 dans la suite d'inégalités précédentes, on obtient : $\|f(x_1 - x_0)\|^2 = 0$ ie $f(x_1) = f(x_0)$. f étant injective, $x_1 = x_0$.

3

- a Hypothèse : x_0 est pseudo-solution de (*). Alors $f(x_0) = y = v - z, z \in \text{Im}(f)^\perp$:
 $\forall x \in E \quad (f(x) | f(x_0) - v) = (f(x) | -z) = 0$ car $f(x) \in \text{Im}(f)$ et $z \in \text{Im}(f)^\perp$.
b Réciproquement, on suppose que le vecteur x_1 vérifie : $\forall x \in E \quad (f(x) | f(x_1) - v) = 0$; alors $f(x_1) - v \in \text{Im}(f)^\perp$. Ainsi $v = f(x_1) - (f(x_1) - v)$, où $f(x_1) \in \text{Im}(f)$ et $v - f(x_1) \in \text{Im}(f)^\perp$.
Comme la décomposition de v comme somme d'un vecteur de $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f)^\perp$ est unique, cela signifie que $f(x_1) = f(x_0)$ ie (question 1) que x_1 est pseudo-solution de (*).

- 4 Pour tout vecteur x de E , $f(x)$ a pour matrice AX , $f(x_0)$ a pour matrice AX_0 et v a pour matrice V .
Comme C est une base orthonormale de F , $(f(x) | f(x_0) - v) = {}^t(AX)(AX_0 - V)$ ie :
 $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tX {}^tAAX_0 - {}^tX {}^tAV = 0 = {}^tX({}^tAAX_0 - {}^tAV) = 0$

Remarque : on note $n = \dim(E)$, $k = \dim(F)$; alors A est de taille (k, n) , V de taille $(k, 1)$ et la matrice ${}^tAAX_0 - {}^tAV$ est de taille $(n, 1)$.

- a Si ${}^tAAX_0 - {}^tAV = 0$, l'égalité demandée est évidemment vérifiée.
b Réciproquement, si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tX({}^tAAX_0 - {}^tAV) = 0$
on écrit cette égalité pour les n matrices colonnes X telles que ${}^tX = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, correspondant aux vecteurs de la base B . Les n coefficients de la matrice ${}^tAAX_0 - {}^tAV$ sont nuls, ie cette matrice est nulle.
Autre méthode : soit $L = {}^tAAX_0 - {}^tAV$.
 $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tX({}^tAAX_0 - {}^tAV) = 0$ En particulier pour $X = L : {}^tLL = \|L\|^2 = 0$ ie $L = 0$.

- c Conclusion x_0 est pseudo-solution de (*) si et seulement si ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.

- 5 On commence par calculer ${}^tAA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. On note $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et le système : ${}^tAAX_0 = {}^tAV$ est

$$\text{alors équivalent à : } \begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ 6y = 3 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases} \text{ soit à } \begin{cases} x = z \\ y = 1/2 \end{cases}. \text{ Les solutions sont les vecteurs } X_0 = \begin{pmatrix} x \\ 1/2 \\ x \end{pmatrix},$$

$x \in \mathbb{R}$.

6

- a On suppose que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale. Dans ce cas

$$\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \|\lambda a + \mu b - c\|^2 \quad \text{Interprétation usuelle (cf cours) : lorsque les réels } \lambda \text{ et } \mu$$

μ décrivent $\mathbb{R}$, la somme $\lambda a + \mu b$ décrit l'espace vectoriel $F = \text{Vect}[a, b]$, et cette somme est minimale lorsque $\lambda a + \mu b$ est le projeté orthogonal de c sur F .

Soit (e_1, e_2) base canonique de $\mathbb{R}^2$, f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $f(e_1) = a$ et $f(e_2) = b$ (on rappelle qu'une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base). Ainsi $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \|f(\lambda e_1 + \mu e_2) - c\|^2$ atteint son minimum pour $x_0 = \lambda e_1 + \mu e_2$ pseudo-solution de l'équation : $f(x) = v = c$ (*) (résultat de la question 1)

La matrice de f est $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$

b Rappel : une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si l'image d'une base de E est une famille libre (de F).

Conséquence : f est injective si et seulement si la famille $\{f(e_1), f(e_2)\} = \{a, b\}$ est libre.

c Conséquence (question 2) : le problème posé admet une unique solution, solution de

l'équation : ${}^t A A X_0 = {}^t A V$; or ${}^t A A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{pmatrix}$ et

${}^t A V = {}^t A C = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}$ On obtient un système de deux équations à deux inconnues, qui admet

une solution unique, car f est inversible (ce qui implique que la matrice ${}^t A A$ est inversible ; on pourrait aussi le vérifier avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité, ce que je vous

laisse faire) On résout donc avec énergie ce système : $\lambda = \frac{\|b\|^2 (a|c) - (a|b)(b|c)}{\|a\|^2 \|b\|^2 - (a|b)^2}$ et

$$\mu = \frac{\|a\|^2 (b|c) - (a|b)(a|c)}{\|a\|^2 \|b\|^2 - (a|b)^2}$$

Partie III –

1

a Existence d'une décomposition.

F est un espace vectoriel euclidien tel que $\text{Im}(f) \subset F$: $F = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(f)^\perp$. Ainsi :

$\forall y \in F \exists ! (x', y') \in \text{Im}(f) \times \text{Im}(f)^\perp / y = x' + y'$.

Puisque $x' \in \text{Im}(f) \exists z \in E / x' = f(z)$

Enfin $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E , espace vectoriel euclidien :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f)^\perp :$$

$\exists ! (x_1, x) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f)^\perp / z = x_1 + x$ et $f(z) = f(x)$ puisque $x_1 \in \text{Ker}(f)$.

Conclusion : $\exists (x, y) \in (\text{Ker}(f))^\perp \times (\text{Im}(f))^\perp / y = f(x) + y'$

b Unicité de cette décomposition : on suppose qu'il existe un deuxième couple (x_1, y_1') de $(\text{Ker}(f))^\perp \times (\text{Im}(f))^\perp$ tel que $y = f(x) + y' = f(x_1) + y_1'$.
Alors $f(x - x_1) = y_1' - y_1 \in \text{Im}(f) \cap (\text{Im}(f))^\perp = \{0_F\}$: $y_1' = y_1$ et $f(x - x_1) = 0_F$ ie $x - x_1 \in \text{Ker}(f)$ mais $x - x_1 \in \text{Ker}(f)^\perp$ (par définition de x et x_1).
Comme $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f)^\perp = \{0_E\}$, $x = x_1$. Conclusion: l'unicité du couple (x, y') est effectivement prouvée.

c Linéarité de g: soit $(y, y_1) \in F^2$, $(a, a') \in \mathbb{R}^2$ Alors (questions a et b)
 $\exists ! (x, x_1, y', y_1') \in ((\text{Ker}(f))^\perp)^2 \times ((\text{Im}(f))^\perp)^2 / y = f(x) + y'$ et $y_1 = f(x_1) + y_1'$
On calcule $ay + by_1 = f(ax + bx_1) + (ay' + by_1')$
Comme $\text{Ker}(f)^\perp$ et $\text{Im}(f)^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement :
 $ax + bx_1 \in \text{Ker}(f)^\perp$, $ay' + by_1' \in \text{Im}(f)^\perp$ et, par définition de g :
 $g(ay + by_1) = ax + bx_1 = ag(y) + bg(y_1)$ g est linéaire.

2 Remarque préliminaire : $\text{Ker}(g) \subset F$ et $\text{Im}(g) \subset E$. Et même $\text{Im}(g) \subset (\text{Ker}(f))^\perp$.

a Recherche du noyau de g : soit $y \in F$.
 $y \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow g(y) = x = 0_E \Leftrightarrow y = f(0_E) + y'$, $y' \in (\text{Im}(f))^\perp$ (décomposition de y vue dans 1a)
 $\Leftrightarrow y \in (\text{Im}(f))^\perp$

Conclusion : $\text{Ker}(g) = (\text{Im}(f))^\perp$

b Recherche de l'image : on sait déjà que $\text{Im}(g) \subset (\text{Ker}(f))^\perp$
On peut utiliser à présent la formule du rang. Puisque g est une application linéaire de F vers E :
 $\dim(\text{Im}(g)) = \dim(F) - \dim(\text{Ker}(g)) = \dim(F) - (\dim(F) - \dim(\text{Im}(f)))$ puisque $\text{Im}(f) \subset F$
 $= \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f))$ (formule du rang appliquée à f , mais $f : E \rightarrow \dots$)
 $= \dim(\text{Ker}(f)^\perp)$ (E est un espace vectoriel euclidien)
Conclusion : $\text{Im}(g) \subset (\text{Ker}(f))^\perp$ et les deux espaces vectoriels ont même dimension : ils sont égaux.

3 Projecteurs orthogonaux.

a Etude de gof : soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times (\text{Ker}(f))^\perp / x = x_1 + x_2$
Alors $f(x) = f(x_2)$ puisque x_1 appartient au noyau de f
 $= f(x_2) + 0_F$: c'est la décomposition de la question 1, unique.
Ce qui permet de calculer $g(f(x)) = x_2 = (\text{gof})(x) = p(x)$ où $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $(\text{Ker}(f))^\perp$
Conclusion : gof est le projecteur orthogonal de E sur $(\text{Ker}(f))^\perp$.

b De même : soit $y \in F$. Alors $\exists ! (x, y') \in \text{Ker}(f)^\perp \times (\text{Im}(f))^\perp / y = f(x) + y'$, avec $f(x) \in \text{Im}(f)$ et $y' \in (\text{Im}(f))^\perp$. Le projeté orthogonal de y sur $\text{Im}(f)$ est $f(x)$.
Par définition de g , $g(y) = x$ et $f(g(y)) = f(x)$
Conclusion : fog est le projecteur orthogonal de F sur $\text{Im}(f)$.

4 Etude d'un premier exemple : on note (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2) la base canonique de F . $\text{Im}(f) = \text{Vect}[f(i), f(j), f(k)] = \text{Vect}[e_1, e_2] = F$: donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ et (formule du rang)

$\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. $v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut chercher G de deux

manières possibles (au moins):

a 1° méthode : recherche de l'expression analytique de G relativement aux bases données. Soit

$y \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in F$. On cherche $(x, y') \in \text{Ker}(f)^\perp \times (\text{Im}(f))^\perp / y = f(x) + y'$.

Puisque $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(F) = 2$ et $\text{Im}(f) \subset F$, en fait $\text{Im}(f) = F$ et $(\text{Im}(f))^\perp = \{0_F\} : y' = 0_E$.

On cherche $x \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ tel que : $f(x) = y$ et $x \perp \text{Ker}(f)$ ie $\begin{cases} a = c + d \\ b = d + e \\ c - d + e = 0 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} c + d = a \\ d + e = b \\ c - d + e = 0 \end{cases}$ On

utilise la méthode du pivot : $(3) \leftarrow (3) - (1) : \begin{cases} c + d = a \\ d + e = b \\ -2d + e = -a \end{cases}$ puis $(3) \leftarrow (3) + 2(2)$

$$\begin{cases} c + d = a \\ d + e = b \\ 3e = 2b - a \end{cases} \quad \text{Ainsi } e = \frac{1}{3}(2b - a), d = b - e = \frac{1}{3}(a + b) \text{ et } c = a - d = \frac{1}{3}(2a - b)$$

Ayant obtenu l'expression analytique de g, on en déduit sa matrice qui est : $G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b 2° méthode : recherche des vecteurs colonnes de G.

i D'abord recherche de $g(e_1)$; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On cherche $z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $f(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$z \in \text{Ker}(f)^\perp \text{ soit : } \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ii De même pour $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On résout le système $\begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 1 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

iii Ce qui donne $G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, ie le même résultat...

5 Cas d'un endomorphisme symétrique.

a Soit $(x, y) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f)$; $\exists z \in E / y = f(z)$

On calcule $(x | y) = (x | f(z)) = (f(x) | z)$ car f est symétrique

$= (0_E | z) = 0$ car x appartient au noyau de f.

Conséquence : $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont orthogonaux, par exemple $\text{Ker}(f) \subset (\text{Im}(f))^\perp$.

On utilise à présent la formule du rang : $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = \dim((\text{Im}(f))^\perp)$

Les deux ensembles ont même dimension et $\text{Ker}(f) \subset (\text{Im}(f))^\perp$.

Conclusion : $\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp$, ce qui implique $\text{Ker}(f)^\perp = ((\text{Im}(f))^\perp)^\perp = \text{Im}(f)$.

b Soit x un vecteur propre de f : $f(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$.

i Si $\lambda = 0$, alors $f(x) = 0_E$ et $x = f(0_E) + x, 0_E \in (\text{Ker}(f))^\perp$ et $x \in \text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp$ On a ainsi obtenu la décomposition de la question 1 : $g(x) = 0_E$ et x est vecteur propre de g.

- ii Si λ est non nul, alors $x = \frac{1}{\lambda} f(x) = f\left(\frac{1}{\lambda} x\right) + 0_E$, avec $\frac{1}{\lambda} x \in \text{Im}(f) = (\text{Ker}(f))^\perp$ (car x appartient à $\text{Im}(f)$) et $0_E \in (\text{Im}(f))^\perp$. On a de nouveau la décomposition de la question 1 : on peut calculer $g(x) = \frac{1}{\lambda} x$ et x est bien vecteur propre de g .

Conclusion : tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .

Remarque : on a même trouvé la valeur propre associée.

- c Puisque f est symétrique, il existe une base de E , orthonormale et formée de vecteurs propres de f (et de g). La matrice de g dans cette base est diagonale, donc symétrique réelle.
Conclusion : g est un endomorphisme symétrique.

6 A est une matrice symétrique réelle : f est un endomorphisme symétrique.

Méthode : on cherche une base orthonormale de vecteurs propres de f , et on connaît leurs images par g , donc la matrice de g dans cette base orthonormale. Il ne restera plus qu'à revenir à la base de départ.

- a Le polynôme caractéristique de A est

$$P(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 0 \\ 2 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = 2(-2)(2-x) + [(3-x)(2-x) - 2](4-x) \text{ en développant par rapport à}$$

la dernière colonne). On développe : $P(x) = x(x^2 - 9x + 18) = x(x-3)(x-6)$

- b A admet trois valeurs propres distinctes ; chaque sous-espace propre est une droite. On en cherche une base.

i Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $AX = 0.X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -x = 2z \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \end{cases}$ Une base

de $\text{Ker}(A)$ est le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et une base orthonormale en est le vecteur $a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ii On résout de même l'équation : $AX = 3X$. Une base orthonormale est donnée par le

vecteur $b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- iii On peut faire de même pour le troisième, ou calculer $a \wedge b$ (puisque'il existe une base orthonormale de vecteurs propres).

iv On prend donc $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ P est orthogonale ; ainsi $P^{-1} = {}^tP$.

- c $A = PDP^{-1}$, où $P = \text{diag}(0, 3, 6)$ et $G = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = (0, 1/3, 1/6)$ (cf question 5b), ce qui

donne $G = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$