

CENTRALE PSI MATHS 1. Corrigé.

Q1.

Les variables X_1, \dots, X_n, X_{n+1} sont mutuellement indépendantes, donc par le lemme des coalitions, les variables $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.

Q2.

$$G_{X_1}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X_1 = n)$$

$$G_{X_1}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n t^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}} = e^{\frac{1}{2}(t-1)}$$

Q3.

On rappelle que si deux variables X et Y sont indépendantes, alors

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

On procède par récurrence sur n .

Initialisation. Vrai au rang $n = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai au rang n .

D'après la question 1, S_n et X_{n+1} sont indépendantes, donc

$$G_{S_{n+1}}(t) = G_{S_n + X_{n+1}}(t) = G_{S_n}(t) \times G_{X_{n+1}}(t)$$

Comme X_{n+1} et X_1 suivent la même loi, on en déduit que $G_{X_{n+1}}(t) = G_{X_1}(t)$

Ainsi par hypothèse de récurrence

$$G_{S_{n+1}}(t) = \left(G_{X_1}(t)\right)^n \times G_{X_1}(t) = \left(G_{X_1}(t)\right)^{n+1}$$

D'où le résultat au rang $n + 1$.

Conclusion, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q4.

$$G_{S_n}(t) = \left(G_{X_1}(t)\right)^n = \left(e^{\frac{1}{2}(t-1)}\right)^n = e^{\frac{n}{2}(t-1)}$$

Et si on note $\mathcal{P}(n/2)$ la loi de Poisson de paramètre $n/2$, alors

$$G_{\mathcal{P}(n/2)}(t) = e^{\frac{n}{2}(t-1)}$$

Ainsi

$$\forall t \quad G_{S_n}(t) = G_{\mathcal{P}(n/2)}(t)$$

Donc S_n et $\mathcal{P}(n/2)$ suivent la même loi.

En particulier

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(S_n = k) = e^{-\frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!}$$

Q5.

$$n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = n! \left(\frac{2}{n}\right)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(S_n = k)$$

$$n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = n! \left(\frac{2}{n}\right)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!}$$

Par changement d'indice

$$n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = n! \left(\frac{2}{n}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+k}}{(n+k)!}$$

$$n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = e^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n! n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Q6.

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leq \frac{n^k}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)} = \frac{n^k n!}{(n+k)!} \leq \frac{(n+1)\dots(n+k)n!}{(n+k)!} = 1$$

Q7.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq u_k(x) = \frac{1}{(1+kx)^k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

De plus

$$\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ converge}$$

Donc la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ .

Q8.

En particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé la série numérique $\sum u_k(1/n)$ est une série convergente.

C'est-à-dire

$$\sum_{k \geq 1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ converge.}$$

Comme la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ , elle converge uniformément sur \mathbb{R}^+ . Par le théorème d'interversion des limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_k \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

Q9.

D'après la question 6,

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leq \frac{n^k n!}{(n+k)!} \leq 1$$

Donc

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leq \frac{n^k n!}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$u_k \binom{1}{n} \leq \frac{n^k n!}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \binom{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k n!}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \binom{1}{n} = 1$ donc par le théorème d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k n!}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

Or

$$e^{\frac{n}{2}} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k n!}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Donc

$$e^{\frac{n}{2}} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) \sim 1$$

$$P(S_n > n) \sim \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n!} \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Q10.

La formule de Stirling est

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Donc

$$P(S_n > n) \sim \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

$$P(S_n > n) \sim e^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$P(S_n > n) \sim \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

En posant

$$\alpha = \frac{\sqrt{e}}{2} < 1$$

On a bien

$$P(S_n > n) = O(\alpha^n)$$

Q11.

On suppose que $x \geq 0$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad [Ax]_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

Or

$$\forall i \forall j \quad a_{ij} \geq 0 \quad x_j \geq 0 \quad \text{donc} \quad [Ax]_i \geq 0$$

Soit

$$[Ax] \geq 0$$

On suppose que $x \geq 0$ et $x \neq 0$.

$$\exists j \text{ tel que } x_j > 0 \text{ donc } a_{ij}x_j > 0$$

Ainsi

$$\forall i \quad [Ax]_i \geq a_{ij}x_j > 0$$

Donc

$$Ax > 0$$

Q12.

On procède par récurrence sur k .

Initialisation. $k = 1$.

Par hypothèse $A > 0$. Le résultat est vrai au rang 1.

Hérédité.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $A^k > 0$.

$$\forall i, j \quad [A^k A]_{ij} = \sum_{\ell=1}^n [A^k]_{i\ell} [A]_{\ell j}$$

Par hypothèse

$$[A^k]_{i\ell} > 0 \quad \text{et} \quad [A]_{\ell j} > 0$$

Donc

$$[A^{k+1}]_{ij} > 0$$

Q13.

On suppose que $\rho(A) = 0$. Donc $Sp(A) = \{0\}$.

Ainsi le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = X^n$

Par le théorème de Cayley-Hamilton

$$A^n = 0$$

Ceci est en contradiction avec $A^n > 0$. Donc $\rho(A) > 0$.

On pose

$$B = \frac{A}{\rho(A)}$$

Soit $\lambda \in Sp(A)$, tel que $|\lambda| = \rho(A)$. $\exists X \neq 0 \quad AX = \lambda X$.

$$BX = \frac{\lambda}{\rho(A)} X$$

Donc

$$\rho\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) \geq \frac{|\lambda|}{\rho(A)} = 1$$

D'autre part soit $\mu \in Sp(B)$ tel que $|\mu| = \rho(B)$. Soit $X \neq 0$ tel que $BX = \mu X$

$$\frac{A}{\rho(A)}X = \mu X$$

$$AX = \rho(A)\mu X$$

Donc

$$|\rho(A)\mu| \leq \rho(A) \quad |\mu| \leq 1 \quad \rho\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) \leq 1$$

Q14.

Comme A est diagonalisable.

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \quad A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

$$A^k = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P$$

Comme $\rho(A) < 1, \forall i \quad |\lambda_i| < 1.$

$$\forall i \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = 0$$

Ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$$

Q15.

Comme $Ax = \lambda x$

$$\forall i \quad [Ax]_i = \lambda x_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

En passant au module

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| = |\lambda x|_i = |\lambda| |x_i| = |x_i|$$

Par inégalité triangulaire

$$|x_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_j|$$

$$|x_i| \leq [A|x|]_i$$

$$|x| \leq A|x|$$

Q16.

On pose

$$y = A|x| - |x|$$

Par hypothèse $y > 0.$

Donc

$$Ay > 0$$

Ainsi

$$A^2|x| - A|x| > 0$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\min\left(\frac{[Ay]_1}{[A|x|]_1}, \dots, \frac{[Ay]_n}{[A|x|]_n}\right) > \varepsilon > 0$$

On a bien

$$A^2|x| - A|x| > \varepsilon A|x|$$

Q17.

On procède par récurrence sur k .

Initialisation. $k = 1$

D'après la question précédente

$$A^2|x| > (1 + \varepsilon)A|x|$$

$$\frac{A}{(1 + \varepsilon)} A|x| > A|x|$$

$$BA|x| > A|x|$$

$$BA|x| \geq A|x|$$

Hérédité.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$B^k A|x| \geq A|x|$$

$$B^{k+1} A|x| = \frac{1}{1 + \varepsilon} A B^k A|x| \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} A^2|x| > A|x|$$

D'où le résultat au rang $k + 1$.

Conclusion, le résultat est vrai pour tout k .

Q18.

$$\rho(B) = \frac{1}{1 + \varepsilon} \rho(A) = \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1$$

Donc d'après la question 14

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$$

Q19.

On obtient

$$0 \geq A|x|$$

Par conséquent $|x| = 0$ et c'est impossible car x est un vecteur propre.

Donc on n'a pas

$$A|x| > |x|$$

On pose

$$y = A|x| - |x|$$

On a

$$y \geq 0$$

Si $y \neq 0$, alors $Ay > 0$, d'après la question 11.

On note

$$J = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid [A|x|]_j \neq 0\}$$

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{[Ay]_j}{[A|x|]_j}, j \in J \right\}$$

Alors, en appliquant exactement le même raisonnement qu'aux questions 17 et 18, alors on obtient encore

$$0 \geq |x|$$

Ce qui est absurde.

Par conséquent $y = 0$. Soit $A|x| = |x|$. Donc 1 est une valeur propre de A .

Q20.

Comme $1 \in Sp(A)$, il existe $x \in \mathbb{C}^n$ $x \neq 0$ tel que $Ax = x$ et d'après les questions 15 à 19, on en déduit que $A|x| = |x|$.

Comme $|x| \geq 0$ et $x \neq 0$, par la question 11, on en déduit que $A|x| > 0$. Donc $|x| > 0$.

Q21.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda \in Sp(A)$ et $|\lambda| = 1$.

On note y un vecteur propre de A associé à λ . Alors $Ay = \lambda y$ et $A|y| = |y|$.

On obtient

$$\sum_{j=1}^n a_{1j}|y_j| = |y_1| = |\lambda y_1| = \left| \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \right|$$

Ainsi

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \exists \lambda_j \in \mathbb{R}^+ \quad a_{1j}y_j = \lambda_j a_{11}y_1$$

On a

$$\sum_{j=1}^n a_{1j}y_j = \lambda y_1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j a_{11}y_1 = \lambda y_1$$

$$a_{11} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right) = \lambda$$

Donc $\lambda \geq 0$. On doit alors avoir $\lambda = 1$.

Q22.

Supposons que $\dim(\ker(A - I_n)) > 1$.

Soit $x, y \in \ker(A - I_n)$ tel que la famille (x, y) soit libre.

Comme $Ax = x$ et $Ay = y$, on sait que $|x| > 0$ et $|y| > 0$.

On pose

$$\alpha = -y_1 \quad \beta = x_1$$

On a

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = 0$$

On pose

$$z = \alpha x + \beta y$$

En particulier $z_1 = 0$.

On a

$z \in \ker(A - I_n) \quad z \neq 0 \quad Az = z \quad \text{et} \quad |z|$ n'est pas strictement positif.
C'est absurde.

Donc $\dim(\ker(A - I_n)) = 1$.

Q23.

On pose

$$B = \frac{A}{\rho(A)}$$

Alors

$$B > 0 \quad \rho(B) = 1$$

Montrons que $\rho(A)$ est une valeur propre dominante.

Soit $\lambda \in Sp(A)$ tel que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit X un vecteur propre de A associé à λ .

$$AX = \lambda X$$

$$\frac{A}{\rho(A)} X = \frac{\lambda}{\rho(A)} X$$

$$BX = \frac{\lambda}{\rho(A)} X$$

Or 1 est une valeur propre dominante de B , donc

$$\frac{\lambda}{\rho(A)} = 1$$

$$\lambda = \rho(A).$$

Ensuite

$$\ker(A - \rho(A)I_n) = \ker(B - I_n)$$

Donc

$$\dim(\ker(A - \rho(A)I_n)) = \dim(\ker(B - I_n)) = 1$$

Q24.

Comme $\rho(A)$ est une valeur propre dominante, on en déduit que

$$|\lambda| < \rho(A)$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A^p Y = \lambda^p Y$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \frac{A^p}{(\rho(A))^p} Y = \left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p Y$$

Et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p = 0$$

Donc

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} Y_p = 0$$

Q25.

On écrit

$$Y = \sum_{\lambda \in S} Y_\lambda + Y_{\rho(A)}$$

$$A^p Y = \sum_{\lambda \in S} A^p Y_\lambda + A^p Y_{\rho(A)} = \sum_{\lambda \in S} \lambda^p Y_\lambda + (\rho(A))^p Y_{\rho(A)}$$

$$Y_p = \sum_{\lambda \in S} \left(\frac{\lambda}{\rho(A)} \right)^p Y_\lambda + Y_{\rho(A)}$$

Ainsi

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} Y_p = Y_{\rho(A)}$$

On suppose que $Y_{\rho(A)} \neq 0$

On sait que $Y \geq 0$. Par conséquent, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $Y_p \geq 0$, et par passage à la limite $Y_{\rho(A)} \geq 0$.

D'après la question 11

$$A Y_{\rho(A)} > 0$$

Or

$$A Y_{\rho(A)} = \rho(A) Y_{\rho(A)}$$

Donc

$$Y_{\rho(A)} > 0$$

Q26.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et comme \mathbb{C} est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de A est scindé. La matrice A est donc trigonalisable dans \mathbb{C} .

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

La matrice A^k est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont les puissances des valeurs propres de A .

Q27.

On note m la multiplicité de la valeur propre $\rho(A)$. Comme $\rho(A)$ est une valeur propre dominante, on en déduit que

$$\forall \lambda \in Sp(A) \quad \lambda \neq \rho(A) \quad |\lambda| < \rho(A)$$

$$\forall k \geq 1 \quad tr(A^k) = m(\rho(A))^k + \sum_{\lambda \neq \rho(A)} \lambda^k = (\rho(A))^k \left(m + \sum_{\lambda \neq \rho(A)} \left(\frac{\lambda}{\rho(A)} \right)^k \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{tr(A^k)}{\rho(A)^k} = m$$

De même

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{tr}(A^{k+1})}{\rho(A)^{k+1}} = m$$

Donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{tr}(A^{k+1})}{\rho(A)^{k+1}} \frac{\rho(A)^k}{\text{tr}(A^k)} = 1$$

Soit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{tr}(A^{k+1})}{\text{tr}(A^k)} = \rho(A)$$

Q28.

$$\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad \sum_{j=0}^N q_{i,j} = \sum_{j=0}^N P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \sum_{j=0}^N \frac{P((X_{n+1} = j) \cap (X_n = i))}{P(X_n = i)}$$

$$\sum_{j=0}^N q_{i,j} = \frac{1}{P(X_n = i)} \sum_{j=0}^N P((X_{n+1} = j) \cap (X_n = i))$$

Comme la famille $(X_{n+1} = j)_{j \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ est un système complet d'événements, on a

$$\sum_{j=0}^N q_{i,j} = \frac{1}{P(X_n = i)} P(X_n = i) = 1$$

Q29.

$$\forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad [Q^T \Pi_n]_j = \sum_{i=0}^N [Q^T]_{ji} [\Pi_n]_i = \sum_{i=0}^N q_{i,j} [\Pi_n]_i = \sum_{i=0}^N q_{i,j} P(X_n = i)$$

$$\forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad [Q^T \Pi_n]_j = \sum_{i=0}^N P(X_{n+1} = j | X_n = i) P(X_n = i)$$

Par la formule des probabilités totales.

$$\forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad [Q^T \Pi_n]_j = P(X_{n+1} = j) = [\Pi_{n+1}]_j$$

Q30.

On procède par récurrence sur n pour obtenir $\Pi_n = (Q^T)^{n-1} \Pi_1$.

La loi de X_n est entièrement déterminé par la loi de X_1 .

Q31.

$A(t)$ est strictement positive, donc par la proposition 1, $A(t)$ possède une valeur propre dominante $\gamma(t) > 0$.

Q32.

D'après la question 25

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Y^{(n)}(t)}{(\gamma(t))^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{A(t)}{\gamma(t)} \right)^{n-1} Z(t) = U(t)$$

où $U(t)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\gamma(t)$ et comme en plus $Z(t)$ est positif, on en déduit que $U(t)$ est strictement positif.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(e^{tS_n})}{(\gamma(t))^{n-1}} = \sum_{j=0}^N U_j(t)$$

On pose

$$\alpha = \sum_{j=0}^N U_j(t) > 0$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(e^{tS_n})}{(\gamma(t))^{n-1}} = \alpha \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{E(e^{tS_n})}{(\gamma(t))^{n-1}} \right) = \ln(\alpha)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(E(e^{tS_n}))}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)}{n} \ln(\gamma(t)) + \frac{\ln(\alpha)}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(E(e^{tS_n}))}{n} = \lambda(t)$$

Q33.

```

1 import numpy as np
2 def puiss2k(M, k):
3     for i in range(k):
4         M=np.dot(M,M)
5     return(M)

```

Q34.

Le programme renvoie une valeur approchée de $\rho(A)$ lorsque k est assez grand.

Q35.

On note

$$\forall n \geq 1 \quad u_n(t) = \frac{\ln(E(e^{tS_n}))}{n}$$

Par hypothèse, la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers $(t \rightarrow \lambda(t))$ sur \mathbb{R}^+ . Donc

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |u_n(t) - \lambda(t)| \leq \varepsilon$$

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \left| \frac{\ln(E(e^{tS_n}))}{n} - \lambda(t) \right| \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |\ln(E(e^{tS_n})) - n\lambda(t)| &\leq n\varepsilon \\ \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \ln(E(e^{tS_n})) &\leq n(\lambda(t) + \varepsilon) \end{aligned}$$

Q36.

Par rappel si X est une variable aléatoire positive alors l'inégalité de Markov est

$$\forall \alpha > 0 \quad P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $X = e^{tS_n}$ et $\alpha = e^{natm}$

$$P(e^{tS_n} \geq e^{natm}) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{natm}}$$

$$P(tS_n \geq natm) \leq \frac{e^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}}{e^{natm}}$$

$$P(S_n \geq nam) \leq e^{-natm} e^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}$$

Q37.

En passant à l'inf sur t

$$P(S_n \geq nam) \leq \inf_{t \geq 0} (e^{n\varepsilon} e^{-n(tam - \lambda(t))})$$

$$P(S_n \geq nam) \leq e^{n\varepsilon} e^{-n \sup_{t \geq 0} (tam - \lambda(t))}$$

$$P(S_n \geq nam) \leq e^{n\varepsilon} e^{-n\lambda^*(am)}$$

Q38.

Comme indiqué au début de l'énoncé m correspond au nombre moyen d'erreurs à chaque instant.

L'inégalité précédente s'écrit aussi

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq am\right) \leq e^{n\varepsilon} e^{-n\lambda^*(am)}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \geq am\right) = 0 \quad \text{avec } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left(\frac{S_n}{n} - m\right) \geq (a-1)m\right) = 0$$

Et la loi des grands nombres nous dit que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Les deux formules sont très proches.

Q39.

On a

$$\hat{\lambda}(t_i) \simeq \lambda(t_i)$$
$$\lambda^*(x_i) = \sup_{t \geq 0} (x_i t - \lambda(t))$$

$$\lambda^*(x_i) \simeq \max_{1 \leq j \leq K} (x_i t_j - \lambda(t_j))$$

$$\lambda^*(x_i) \simeq \max_{1 \leq j \leq K} (x_i t_j - \hat{\lambda}(t_j))$$

$$\lambda^*(x_i) \simeq \hat{\lambda}^*(x_i)$$

Q40.

On utilise la propriété suivante :

$$\begin{cases} \lambda^*(x) = 0 & \text{pour tout } x \leq m \\ \lambda^*(x) > 0 & \text{pour tout } x > m \end{cases}$$

Et à l'aide du tableau on trouve que $4,70 \leq m < 4,75$.

$$4,70 \times 1,1 = 5,17 \quad 4,75 \times 1,1 = 5,225 \quad 5,17 \leq am \leq 5,225$$
$$\hat{\lambda}^*(5,17) \leq \hat{\lambda}^*(am) \leq \hat{\lambda}^*(5,225)$$
$$-\hat{\lambda}^*(5,225) \leq -\hat{\lambda}^*(am) \leq -\hat{\lambda}^*(5,17) \leq -\hat{\lambda}^*(5,15) = -4,1 \times 10^{-2}$$

Par conséquent

$$P(S_n > 1,1mn) \leq e^{-n(4,1 \times 10^{-2} - \varepsilon)}$$

Donc

$$h \simeq 4,1 \times 10^{-2}$$

FIN