concours externe [redacted]
de recrutement de professeurs certifiés

deuxième composition de mathématiques [redacted]

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche – éventuellement programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Notations et objectifs du problème

Dans le problème, $\mathcal{E}$ désigne un plan vectoriel euclidien, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent deux vecteurs unitaires et non colinéaires de $\mathcal{E}$, D et Δ désignent les droites vectorielles orthogonales respectivement à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$. On note s la réflexion d'axe D, c'est-à-dire la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à D, et t la réflexion d'axe Δ.

L'objet du problème est la recherche d'une condition nécessaire et suffisante sur le produit scalaire $\vec{v}.\vec{w}$, pour que tout vecteur image de $\vec{v}$ ou de $\vec{w}$ par un élément quelconque du groupe des isométries engendré par s et t s'exprime dans la base $(\vec{v}, \vec{w})$ avec deux coefficients de même signe. Dans la partie I, on étudie une suite qui sera un outil essentiel dans les parties suivantes. Dans la partie II, on trouve la condition suffisante cherchée. Dans la partie III, on remplace le produit scalaire par une forme bilinéaire symétrique plus générale, et on résout complètement la question dans ce cadre.

I Étude d'une suite

Dans cette partie α désigne un nombre réel quelconque et on pose

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 1} & \text{si } |\alpha| \geq 1 \\ i\sqrt{1 - \alpha^2} & \text{si } |\alpha| < 1 \end{cases}.$$

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{(\alpha + \delta)^n - (\alpha - \delta)^n}{2\delta} & \text{si } \alpha \neq \pm 1 \\ n & \text{si } \alpha = 1 \\ (-1)^{n-1} n & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

1) Calculer u_0 et u_1, puis montrer qu'on a pour tout entier $n \geq 0$

$$u_{n+2} = 2\alpha u_{n+1} - u_n.$$

En déduire que (u_n) est une suite de nombres réels.

A SUIVRE

2) Montrer que si $\alpha \geq 1$ alors, pour tout entier $n \geq 1$ on a $u_n > 0$.

3) Montrer que si $\alpha \leq -1$, on a $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout entier $n \geq 1$ (on pourra poser $\alpha = -\alpha'$ et comparer la suite u_n avec la suite u'_n construite de façon analogue à l'aide de α').

4) On suppose $|\alpha| < 1$ et on écrit $\alpha = \cos\theta$ avec $0 < \theta < \pi$.

   a) Montrer que si $m = E(\pi/\theta)$ (où E désigne la fonction partie entière), les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$0 < m\theta \leq \pi < (m+1)\theta < 2\pi.$$

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$.

   c) Déduire de a) et b) que, si $u_n u_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un entier $m \geq 2$ tel que $\theta = \pi/m$.

   d) Réciproquement démontrer que si $\theta = \pi/m$ avec m entier supérieur ou égal à 2, alors $u_n u_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Déduire des questions 2), 3), 4) l'équivalence des propriétés (*) et (**) ci dessous :

$$u_n u_{n+1} \geq 0 \text{ pour tout } n \geq 0 \qquad (*)$$

$$\alpha \geq 1 \text{ ou } \alpha = \cos(\pi/m) \text{ avec } m \in \mathbb{N} - \{0,1\}. \qquad (**)$$

II Application à un problème de géométrie plane

On suppose, dans toute cette partie II,qu'on a $\vec{v}.\vec{w} = -\cos(\pi/m)$, où $m \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, et où $\vec{v}.\vec{w}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

1) Montrer qu'on peut orienter $\mathcal{E}$ de manière que l'angle orienté $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ ait pour mesure $\pi - \pi/m$.

   On supposera $\mathcal{E}$ orienté de cette manière dans toute la suite du II.

2) On rappelle que la composée de deux réflexions vectorielles est une rotation vectorielle. On pose $r = s \circ t$.

   a) Déterminer une mesure de l'angle de r.

   b) Montrer que r est d'ordre fini (c'est-à-dire qu'il existe au moins un entier $d > 0$ tel que $r^d = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$) et déterminer son ordre (c'est-à-dire le plus petit entier $d > 0$ tel que $r^d = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$).

3) Si ρ est une rotation vectorielle quelconque de $\mathcal{E}$, montrer que $\rho \circ s$ est une réflexion vectorielle qui peut encore s'écrire $s \circ \rho^{-1}$ (on pourra décomposer ρ en un produit de deux réflexions bien choisies).

4) On note G l'ensemble des isométries vectorielles de la forme r^k ou $s \circ r^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   a) En utilisant la question précédente, montrer que G est un sous-groupe du groupe des isométries vectorielles de $\mathcal{E}$.

Tournez la page S.V.P.

b) Montrer que le groupe G est fini et préciser son cardinal.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ la base orthonormée directe de $\mathcal{E}$ telle que $\vec{v}_1 = \vec{v}$. À tout vecteur de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{B}$ on associe son affixe $x_1 + ix_2$.

5) Quelles sont les affixes de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$?

6) Soit un entier $n \in \mathbb{N}$, et soit $\vec{x}$ le vecteur d'affixe $e^{in\pi/m}$.

a) En reprenant les notations de la partie I, démontrer l'égalité

$$(\alpha + \delta)^n + u_n(\alpha - \delta) = u_{n+1}.$$

b) On pose $\vec{x} = a\vec{v} + b\vec{w}$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$). En faisant $\alpha = \cos(\pi/m)$ dans l'égalité précédente, déterminer a et b en fonction de u_n et de u_{n+1}, puis montrer que a et b sont de même signe (c'est-à-dire que $ab \geq 0$).

7) Soit X l'ensemble de tous les vecteurs $\vec{x}$ dont l'affixe est une racine $2m$-ième de l'unité.

a) Montrer que tout élément de X est de la forme $a\vec{v} + b\vec{w}$ avec a et b de même signe.

b) Donner les écritures complexes de r et de s.

c) En déduire que $r(X) = X$, que $s(X) = X$, puis que $g(X) = X$ pour tout élément g de G.

8) Soit $\Phi = \{ g(\vec{v}) \mid g \in G \} \cup \{ g(\vec{w}) \mid g \in G \}$; montrer que tout élément de Φ est de la forme $a\vec{v} + b\vec{w}$ avec a et b de même signe (on pourra commencer par montrer que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent à X).

III Étude du problème réciproque

Soit $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) = \varphi(\vec{w}, \vec{w}) = 1$. On définit deux endomorphismes σ et τ de $\mathcal{E}$ par

$$\begin{cases} \sigma(\vec{x}) = \vec{x} - 2\varphi(\vec{v}, \vec{x})\vec{v} \\ \tau(\vec{x}) = \vec{x} - 2\varphi(\vec{w}, \vec{x})\vec{w} \end{cases}$$

pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{E}$ (on ne demande pas de montrer que σ et τ sont des applications linéaires).

1) On suppose, dans cette question seulement, que φ est le produit scalaire euclidien de $\mathcal{E}$. Préciser alors la nature de σ et de τ.

Dans toute la suite du problème on utilise les notations de la partie I, en prenant $\alpha = -\varphi(\vec{v}, \vec{w})$. On pose $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer les matrices A et B respectives de σ et τ dans la base $(\vec{v}, \vec{w})$.

A SUIVRE

3) Démontrer les égalités :

$$(AB)^n = \begin{pmatrix} u_{2n+1} & -u_{2n} \\ u_{2n} & -u_{2n-1} \end{pmatrix} \text{ pour } n \in \mathbb{N} - \{0\},$$

et

$$B(AB)^n = \begin{pmatrix} u_{2n+1} & -u_{2n} \\ u_{2n+2} & -u_{2n+1} \end{pmatrix} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

4) Calculer A^2 et B^2. En déduire que σ et τ appartiennent au groupe linéaire $GL(\mathcal{E})$ des automorphismes de $\mathcal{E}$, et que le sous-groupe Γ de $GL(\mathcal{E})$ engendré par σ et τ (c'est-à-dire le plus petit sous-groupe de $GL(\mathcal{E})$ contenant σ et τ) est constitué des automorphismes $(\sigma\tau)^n$, $\tau(\sigma\tau)^n$, $(\sigma\tau)^n\sigma$, $\tau(\sigma\tau)^n\sigma$, où n décrit $\mathbb{N}$.

5) Calculer le polynôme caractéristique de AB. En déduire que AB est toujours diagonalisable sur $\mathbb{C}$, sauf pour deux valeurs de α que l'on précisera.

6) On suppose dans cette question que $\alpha = \cos(k\pi/m)$ avec $(m,k) \in \mathbb{N}^2$, $m \geq 2$, $0 < k < m$. Diagonaliser la matrice AB et calculer $(AB)^m$.

7) Réciproquement, on suppose qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $(AB)^m = I_2$. Montrer qu'on a $m \geq 2$, que AB est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et que ses valeurs propres sont des racines m-ièmes de l'unité. En déduire que $\alpha = \cos(k\pi/m)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < k < m$.

8) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que le groupe Γ soit fini.

9) Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma(\vec{v}) = \pm(\sigma\tau)^n(\vec{v})$ ou $\gamma(\vec{v}) = \pm\tau(\sigma\tau)^n(\vec{v})$ avec $n \in \mathbb{N}$, et que $\gamma(\vec{w}) = \pm(\sigma\tau)^n(\vec{w})$ ou $\gamma(\vec{w}) = \pm\tau(\sigma\tau)^n(\vec{w})$ avec $n \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser la question 4).

10) On pose

$$\Psi = \{\, \gamma(\vec{v}) \mid \gamma \in \Gamma \,\} \cup \{\, \gamma(\vec{w}) \mid \gamma \in \Gamma \,\}.$$

Montrer que tout élément de Ψ s'écrit $a\vec{v} + b\vec{w}$ avec a et b de même signe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

$$\varphi(\vec{v},\vec{w}) = -\cos(\pi/m) \text{ avec } m \in \mathbb{N} - \{0,1\} \tag{1}$$

$$\varphi(\vec{v},\vec{w}) \leq -1 \tag{2}$$

11) a) Montrer que le groupe G défini dans la partie II est le sous-groupe de $GL(\mathcal{E})$ engendré par s et t.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le produit scalaire $\vec{v}.\vec{w}$ pour que tout élément de l'ensemble Φ défini en II. 8) s'écrive $a\vec{v} + b\vec{w}$ avec a et b de même signe.

FIN