

# Mines 2006 -PSI seconde épreuve : corrigé

## Partie I.

1. Soit  $A$  une matrice positive.  $B = {}^tMAM$  est symétrique ( ${}^tB = {}^tM{}^tAM = B$ ) et

$$(BX|X) = (AMX|MX) = (AY|Y) \text{ avec } Y = MX$$

et cette quantité est positive par hypothèse sur  $A$ .  $B$  est donc symétrique positive.

2. On suppose  $A$  symétrique positive. On montre par récurrence que la proposition " $A^k$  est positive" est vraie pour tout entier  $k$ .

- $A^0 = I_n$  est symétrique et  $(A^0X|X) = (X|X) = \sum x_i^2 \geq 0$ . La propriété est vraie pour  $k = 0$ . Elle est aussi vraie au rang 1 par hypothèse sur  $A$ .
- Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang  $k \geq 1$ . On a alors

$$A^{k+1} = AA^{k-1}A = {}^tAA^{k-1}A$$

et l'hypothèse au rang  $k - 1$  ainsi que la question précédente donnent  $A^{k+1}$  symétrique positive.

*Remarque : on aurait aussi pu commencer par la question suivante avant de traiter celle ci puisque les valeurs propres de  $A^k$  sont les puissances  $k$ -ième de celles de  $A$ .*

3. On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc une matrice orthogonale  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = {}^tPDP$ . Les coefficients diagonaux  $d_i$  de  $D$  sont alors les valeurs propres de  $A$  et on a

$$(AX|X) = (DPX|PX) = (DY|Y) = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \text{ avec } Y = PX$$

- Si les  $d_i$  sont tous positifs alors  $(AX|X)$  est positif comme somme de quantités positives. Réciproquement, si  $\exists i / d_i < 0$  alors pour  $X = P^{-1}e_i$  ( $i$ -ème vecteur de la base canonique) on a  $X \neq 0$  et  $(AX|X) = d_i < 0$ .  $A$  est donc positive ssi ses valeurs propres sont positives.
  - Si  $\forall i, d_i > 0$  alors  $(AX|X) = 0$  entraîne  $Y = 0$  (une somme de quantités positives n'est nulle que si chaque quantité l'est) et donc  $X = 0$  ( $P$  étant inversible). Réciproquement, si  $\exists i / d_i < 0$  alors pour  $X = P^{-1}e_i$  on a  $X \neq 0$  et  $(AX|X) = d_i \leq 0$ .  $A$  est donc définie positive ssi ses valeurs propres sont strictement positives.
4. Comme ci-dessus,  $A = {}^tPDP$  avec  $P$  orthogonale et  $D = \text{diag}(d_i)$  diagonale à coefficients diagonaux  $> 0$ . Si on pose  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_i})$  et  $C = {}^tP\Delta P$  alors  $C$  est symétrique et ses valeurs propres sont les  $\sqrt{d_i} > 0$  (C'est semblable à  $\Delta$  puisque  $P^{-1} = {}^tP$ ). Ainsi  $C$  est symétrique définie positive.
5. Soit  $\mu$  une valeur propre de  $C$  (on notera  $sp(C)$  le spectre de  $C$ ) et  $X$  un vecteur propre associé. On a alors  $AX = C^2X = \mu^2X$ . On a donc

$$(*) : \forall \mu \in sp(C), \ker(C - \mu I_n) \subset \ker(A - \mu^2 I_n)$$

Les valeurs propres de  $C$  étant strictement positives ont des carrés deux à deux distincts et, les sous-espaces propres d'une matrice étant en somme directe, on a donc

$$\bigoplus_{\mu \in sp(C)} \ker(C - \mu I_n) \subset \bigoplus_{\mu \in sp(C)} \ker(A - \mu^2 I_n)$$

$C$  étant diagonalisable le membre de gauche est égal à  $\mathbb{R}^n$ . Le membre de droite étant inclus dans  $\mathbb{R}^n$  on a donc

$$\bigoplus_{\mu \in sp(C)} \ker(C - \mu I_n) = \bigoplus_{\mu \in sp(C)} \ker(A - \mu^2 I_n) = \mathbb{R}^n$$

De plus, les inclusions dans (\*) sont nécessairement des égalités (sinon, on obtiendrait une inclusion stricte en prenant la somme directe).

Finalement, les valeurs propres de  $A$  sont les carrés de celles de  $C$  et on a égalité des sous-espaces propres correspondants. On peut écrire cela

$$sp(C) = \{\sqrt{\lambda} / \lambda \in sp(A)\} \text{ et } \forall \lambda \in sp(A), \ker(C - \sqrt{\lambda} I_n) \subset \ker(A - \lambda I_n)$$

6. D'après la question précédente, si  $C^2 = A$  alors  $C$  agit comme une l'homothétie de rapport  $\sqrt{\lambda}$  sur  $\ker(A - \lambda I_n)$ . Les sous-espaces propres de  $A$  étant supplémentaires dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $C$  est ainsi parfaitement caractérisée (comme une application linéaire sur une famille de supplémentaires). Il y a unicité si existence de  $C$  et on a exhibé une solution. C'était donc l'unique solution et la façon dont l'a construite nous indique que  $C$  est diagonalisable dans une base orthonormée diagonalisant  $A$ .
7. Soit  $A$  définie positive. 0 n'est pas valeur propre de  $A$  (question 3) et  $A$  est donc inversible.  $A^{-1}$  est symétrique (comme  $A$ ) et définie positive (ses valeurs propres, les inverses de celles de  $A$ , sont strictement positives).  $A^{1/2}$  est elle aussi définie positive (ses valeurs propres sont les racines carrées de celles de  $A$ ). Si on pose  $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$  on a une matrice symétrique définie positive et

$$A^{-1/2} A^{-1/2} = ((A^{1/2})^2)^{-1} = A^{-1}$$

L'unicité d'une telle matrice  $A^{-1/2}$  a été justifiée en question 6.

8. Il a été justifié ci-dessus que

$$A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$$

## Partie II.

9. On a trois propriétés à vérifier.

- $A - A = 0_n$  est symétrique positive et donc  $A \preceq A$ . La relation  $\preceq$  est réflexive.
- Si  $A \preceq B$  et  $B \preceq C$  alors  $B - A$  et  $C - B$  sont positive. La somme de deux matrices positives étant positive ( $((M + N)X|X) = (MX|X) + (NX|X)$ ),  $C - A$  est positive et  $A \preceq C$ . La relation  $\preceq$  est transitive.
- Si  $A \preceq B$  et  $B \preceq A$  alors  $M = B - A$  et  $-M$  sont positives. Les valeurs propres de  $-M$  étant les opposées de celles de  $M$ , ces valeurs propres sont négatives ( $M$  positive) et positives ( $-M$  positive).  $M$  est donc diagonalisable et 0 est sa seule valeur propre. Ainsi  $M = 0$ . La relation  $\preceq$  est antisymétrique.

10. Si  $B - A$  est positive alors  ${}^t C(B - A)C$  l'est aussi (question 1) et donc  ${}^t CAC \preceq {}^t CBC$ .

11. Les valeurs propres de  $A - I_n$  sont celles de  $A$  auxquelles on retranche 1. Si  $I_n \preceq A$  alors les valeurs propres de  $A$  sont donc plus grandes que 1. En particulier  $A$  est inversible ( $0 \notin sp(A)$ ). De plus, les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont dans  $]0, 1]$  et celles de  $I_n - A^{-1}$  sont donc positive. On en déduit que  $A^{-1} \preceq I_n$ .

12. On suppose  $0_n \prec A \preceq B$ . On a alors  $A$  qui est définie positive et qui s'écrit donc  $A = A^{1/2}A^{1/2}$ .  $A^{1/2}$  est inversible d'inverse  $A^{-1/2}$ . Cette matrice est symétrique et la question 10 donne

$$A^{-1/2}AA^{-1/2} \preceq A^{-1/2}BA^{-1/2}$$

D'après la question 8,  $A^{-1/2}AA^{-1/2} = I_n$  et la question précédente indique alors que  $A^{-1/2}BA^{-1/2}$  est inversible.  $A^{-1/2}$  l'étant aussi,  $B$  est encore inversible et  $(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1} = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ . La question précédente indique aussi que

$$A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \preceq I_n$$

En utilisant la question 9 avec  $C = A^{-1/2}$ , on a finalement

$$B^{-1} \preceq A^{-1}$$

13. Les valeurs propres de  $D$  sont les racines de  $X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$ . Le produit des valeurs propres vaut  $ac - b^2$  et les valeurs propres ont même signe si ce produit est positif. Le signe est alors donné par celui de  $a+c$ . La CNS cherchée est donc  $\begin{cases} ac - b^2 \geq 0 \\ a + c \geq 0 \end{cases}$ .
14. On exploite la question précédente au brouillon ce qui amène à choisir

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}$$

On a alors

$$D = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B - D = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 - D^2 = \begin{pmatrix} -1/16 & -5/8 \\ -5/8 & 11/4 \end{pmatrix}$$

Trace et déterminant de  $D$  et  $B - D$  sont positifs et on a donc  $0_n \preceq D \preceq B$ . Le déterminant de  $B^2 - D^2$  est lui  $< 0$  et donc  $D^2 \not\preceq B^2$ .

### Partie III.

15. On a  $MX = \lambda X$  et donc  $\Delta P^{-1}X = \lambda P^{-1}X$ . Posons  $Y = P^{-1}X = (y_1, \dots, y_n)$ .  $\Delta Y = \lambda Y$  donne

$$\forall i, (\lambda_i - \lambda)y_i = 0$$

Les coordonnées de  $Z = f(\Delta)Y$  valent  $z_i = f(\lambda_i)y_i$ . Comme  $y_i = 0$  ou  $\lambda_i = \lambda$ , on a toujours  $z_i = f(\lambda)y_i$  et donc  $Z = f(\lambda)Y$ . Ainsi,

$$RX = Pf(\delta)P^{-1}X = Pf(\delta)Y = PZ = f(\lambda)PY = f(\lambda)X$$

16. Notons  $R_P = Pf(\Delta_P)P^{-1}$  et  $R_Q = Qf(\Delta_Q)Q^{-1}$ . La question précédente indique que si  $MX = \lambda X$  alors  $R_P X = R_Q X = f(\lambda)X$ .  $R_P$  et  $R_Q$  agissent donc de la même façon sur les vecteurs propres de  $M$ . Comme il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  de tels vecteurs propres, on a donc  $R_P = R_Q$ .
17. *Remarque : si  $\varphi \in E$  alors pour tout  $t \geq 0$ ,  $s \mapsto \frac{st}{1+st}\varphi(s)$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , équivalente à  $s \mapsto ts\varphi(s)$  en 0 et à  $\varphi$  en l'infini. C'est donc une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $L_\varphi$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^+$ . Elle est clairement à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .*  
 $\varphi_r$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et à valeurs positives. En l'infini,  $\varphi$  est intégrable si et seulement si  $r > 0$ . En 0,  $s\varphi(s) = s^{-r}$  est intégrable si et seulement  $r < 1$ . On a donc

$$\varphi_r \in E \iff r \in ]0, 1[$$

Dans ce cas, on a (en posant  $u = st$ )

$$\forall t > 0, L_{\varphi_r}(t) = t^r L_{\varphi_r}(1)$$

18.  $A$  étant symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc une matrice orthogonale  $P$  telle que  $A = PDP^{-1}$  où  $D$  est diagonale et alors

$$f_s(A) = Pf_s(D)P^{-1}$$

Notons  $d_i$  les coefficients diagonaux de  $D$ . On remarque que

$$f_s(D) = I_n - \text{diag}((1 + sd_i)^{-1}) = I_n - \text{diag}(1 + sd_i)^{-1} = I_n - (I_n + sD)^{-1}$$

Ainsi, on a

$$f_s(A) = I_n - P(I_n + sD)^{-1}P^{-1} = I_n - (I_n + sPDP^{-1})^{-1} = I_n - (I_n + sA)^{-1}$$

19. Soient  $A$  et  $B$  des matrices symétriques telles que  $0 \preceq A \preceq B$  et  $s \geq 0$ .  $B - A$  étant positive,  $s(B - A)$  l'est aussi et donc  $(I_n + sB) - (I_n + sA)$  l'est aussi. En outre  $I_n + sA$  est définie positive (ses valeurs propres sont supérieures à 1...) et donc

$$0 \prec I_n + sA \preceq I_n + sB$$

La question 12 donne alors

$$(I_n + sB)^{-1} \preceq (I_n + sA)^{-1}$$

On a donc  $f_s(B) - f_s(A) = (I_n + sA)^{-1} - (I_n + sB)^{-1}$  qui est positive c'est à dire  $f_s(A) \preceq f_s(B)$ . On a donc montré que  $s$  est matriciellement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

20. Soient  $P$  une matrice orthogonale et  $D = \text{diag}(d_i)$  telles que  $A = P^{-1}DP = {}^tPDP$ . Par définition, on a

$$(L_\varphi(A)X|X) = ({}^tPL_\varphi(D)PX|X) = (L_\varphi(D)PX|PX)$$

Soit  $Y = PX = (y_1, \dots, y_n)$ . On a alors

$$(L_\varphi(A)X|X) = \sum_{i=1}^n L_\varphi(d_i)y_i^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^{+\infty} f_s(d_i)y_i^2 \varphi(s) ds$$

On permute somme et intégrale par linéarité de l'intégrale (la somme est finie) et on interprète alors la somme comme un produit scalaire :

$$(L_\varphi(A)X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(f_s(D)Y|Y) ds$$

Comme  $f_s(D) = Pf_s(A){}^tP$  et  $Y = PX$  on a donc

$$(L_\varphi(A)X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(Pf_s(A)X|PX) ds$$

et en utilisant une nouvelle fois le caractère orthogonal de  $P$ ,

$$(L_\varphi(A)X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(f_s(A)X|X) ds$$

21. On a donc (linéarité du produit scalaire et de l'intégrale)

$$((L_\varphi(A) - L_\varphi(B))X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)((f_s(B) - f_s(A))X|X) ds$$

Si  $0 \prec A \preceq B$  alors  $\forall s \geq 0$ ,  $((f_s(B) - f_s(A))X|X) \geq 0$  (question 19). Comme  $\varphi(s) \geq 0$  et comme l'intégrale est croissante,

$$((L_\varphi(A) - L_\varphi(B))X|X) \geq 0$$

Ainsi,  $L_\varphi(A) \preceq L_\varphi(B)$  et  $L_\varphi$  est matriciellement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

22. Si  $r \in ]0, 1[$  alors  $L_{\varphi_r}(A) = L_{\varphi_r(1)}A^r$ . On a donc

$$\forall r \in ]0, 1[, 0 \prec A \preceq B \Rightarrow L_{\varphi_r(1)}A^r \preceq L_{\varphi_r(1)}B^r$$

Comme  $L_{\varphi_r(1)} > 0$ , on en déduit aisément que pour  $r \in ]0, 1[$ ,  $x \mapsto x^r$  est matriciellement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .