

Concours Communs Polytechniques

Filière PC Math 1 2005

Sur l'exponentielle de matrice .

PARTIE I

I.1) Exemple

- a) En développant par rapport à la seconde ligne (colonne) on a $\boxed{\det(M) = 2}$
- b) On calcule les cofacteurs $A_{1,1} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 4$, $A_{1,2} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = -6, \dots$

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{A \cdot {}^t Com(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

remarque : à vérifier avec I.2.d)

- c) On a $\varkappa_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 3 \\ -6 & -1-\lambda & -3 \\ -6 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda+1)^2(2-\lambda)$
- d) $(I_3 + M)(2I_3 - M) = \dots = 0_3$ et donc comme $\varkappa_M(M) = (M + I_3)^2(2I_3 - M) = (I_3 + M)((I_3 + M)(2I_3 - M) = 0_3$

$$\boxed{\varkappa_M(M) = 0_3}$$

remarque : toujours à vérifier avec I.4.c)

I.2) propriétés de la comatrice :

remarque : prendre $A = M$ et quelques exemples n'est pas inutile pour voir B

- a) C'est le développement de la matrice B par rapport à la colonne j , en remarquant que une fois retirée les colonnes j de A et B on obtient les mêmes matrices donc les mêmes cofacteurs.
- b) On pose $\beta_k = a_{k,l}$ puis on sépare en deux :

$$\begin{cases} \text{si } l = j \text{ alors } \beta_k = a_{k,j} \text{ et donc } B = A \text{ et } \sum_{k=1}^n a_{k,l} A_{k,l} = \det(B) = \det(A) \\ \text{si } l \neq j \text{ alors la matrice } B \text{ a deux colonnes égales (} l \text{ et } j \text{) d'où } \sum_{k=1}^n a_{k,l} A_{k,l} = \det(B) = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\forall (l; j) \in \mathbb{N}_n^2, \sum_{k=1}^n a_{k,l} A_{k,l} = \det(A) \delta_{l,j}$$

- c) On introduit une matrice B' obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la ligne formée des coefficients β_i . On a alors $\det(B) = \sum_{k=1}^n \beta_k A_{i,k}$, puis on remplace les β_k par a_{lk}
- d) Si $M = {}^t Com(A)$ on a pour tout (i, j) $m_{i,j} = A_{j,i}$, d'où $(AM)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} m_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{j,k} = \det(A) \delta_{i,j}$ d'après 1.2.c) et $(MA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n A_{k,i} a_{k,j} = \det(A) \delta_{i,j}$ d'après 1.2.b)

On a donc :

$$\boxed{A \cdot {}^t Com(A) = {}^t Com(A) \cdot A = \det(A) I_n}$$

I.3)

- a) pour $n = 1$: $\det(G(x)) = G_{1,1}(x)$, et $G_{1,1}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1

On suppose que pour toute famille $(H_{i,j})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1}$ de polynômes de degré inférieur ou égal à 1 $\det(H_{i,j}(x)) = Q_1(x)$, Q_1 étant un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. On a alors par développement par rapport à la première colonne

$$\det(G) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} G_{i,1}(x) \det(C_{i,1}(x))$$

où $C_{i,1}(x)$ est une matrice extraite de $G(x)$ de taille $(n-1) \times (n-1)$. Les coefficients de $C_{i,1}(x)$ sont des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1, donc par l'hypothèse de récurrence il existe un polynôme P_i de degré inférieur ou égal à $n-1$ et tel que $\det(C_{i,1}(x)) = P_i(x)$. On a alors

$$\det(G) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} G_{i,1}(x) P_i(x)$$

Par les théorèmes sur le degré d'une somme et d'un produit de polynôme on a $d^\circ \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} G_{i,1} P_i \right) \leq n$. D'où le résultat par récurrence.

- b) Une matrice est nulle si et seulement si tous ses coefficients le sont donc, en notant $d_{i,j}^{(k)}$ les coefficients de D_k on a :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \sum_{k=0}^p d_{i,j}^{(k)} x^k = 0$$

Une fonction polynôme étant nulle si et seulement si tous ses coefficients le sont on a $\forall k, \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, d_{i,j}^{(k)} = 0$ $\boxed{D_k = 0}$

I.4) le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur

- a) chaque coefficient de $C(x)$ est un cofacteur de $(A - xI_n)$ donc c'est, au signe près, le déterminant d'une matrice $(n-1) \times (n-1)$ ayant pour coefficients des fonctions polynômes de degré au plus 1. Donc d'après I.3.a) chaque coefficient de $C(x)$ est une fonction polynôme de degré au plus $n-1$. Il existe donc des réels $(b_{i,j}^{(k)})$ tels que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ $(C(x))_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{i,j}^{(k)} x^k$. En prenant pour B_k la matrice de coefficients $b_{i,j}^{(k)}$ on a la relation voulue.
- b) D'après I.2 on a $(A - xI_n)C(x) = \det(A - xI_n)I_n = \chi_A(x)I_n$. Or

$$(A - xI_n)C(x) = (A - xI_n) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k A \cdot B_k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} B_k = A \cdot B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k (A \cdot B_k - B_{k-1}) - x^n B_{n-1}$$

on a donc

$$AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k (A \cdot B_k - B_{k-1}) - x^n B_{n-1} = \chi_A(x)I_n = \sum_{k=0}^n x^k \alpha_k I_n$$

On utilise alors I.3.b) avec $D_0 = AB_0 - \alpha_0 I_n, \forall k \in \mathbb{N}_{n-1}, D_k = A \cdot B_k - B_{k-1} - \alpha_k I_n$ et $D_n = -B_{n-1} - \alpha_n I_n$ pour avoir le résultat voulu.

- c) Si on multiplie à gauche la ligne $A \cdot B_k - B_{k-1} = \alpha_k I_n$ par A^k on obtient $\alpha_k A^k = A^{k+1} \cdot B_k - A^k \cdot B_{k-1}$ et de même $\alpha_n A^n = -A^n B_{n-1}$. D'où

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = A \cdot B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (A^{k+1} \cdot B_k - A^k \cdot B_{k-1}) - A^n B_{n-1} \\ &= A \cdot B_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} A^{k+1} B_k - \sum_{k=0}^{n-2} A^{k+1} \cdot B_k \right) - A^n B_{n-1} \\ &= A \cdot B_0 + (A^n \cdot B_{n-1} - AB_0) - A^n B_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

On a bien vérifié :

$$\boxed{\chi_A(A) = 0}$$

PARTIE 2

II.1

- a) On peut remarquer que $C_1 = I_n$ puis $\forall k \in [[2, n]]$, $C_k = (A - \lambda_{k-1}I_n) \cdot C_{k-1}$. De plus

$$A \cdot (A - \lambda_{k-1}I_n) = A^2 - \lambda_{k-1}A = (A - \lambda_{k-1}I_n) \cdot A$$

d'où le résultat par récurrence : on a $A.C_1 = C_1.A$ puis si $A.C_{k-1} = C_{k-1}.A$ alors $A.C_k = C_k.A$

- b) $(A - \lambda_n I_n) \cdot C_n = \prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I_n) = \mathcal{A}_A(A) = 0$ d'après la première partie.

II.2 : une solution de l'équation différentielle

- a) Par définition de Y les fonctions y_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc E_k est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus $Y'(s) = H.Y(s)$ donc $y_1'(s) = \lambda_1 y_1(s)$ et $\forall k \in [[2, n]]$, $y_k'(s) = y_{k-1}(s) + \lambda_k y_k(s)$

On a alors

$$\begin{aligned} E_A'(s) &= \sum_{k=1}^n y_k'(s) C_k = \lambda_1 y_1(s) C_1 + \sum_{k=2}^n (y_{k-1}(s) + \lambda_k y_k(s)) C_k = \lambda_1 y_1(s) C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s) C_{k+1} + \sum_{k=2}^n \lambda_k y_k(s) C_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s) C_{k+1} + \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k(s) C_k = \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s) (C_{k+1} + \lambda_k C_k) + y_n(s) \lambda_n C_n \end{aligned}$$

Or $C_{k+1} + \lambda_k C_k = (A - \lambda_k I_n) \cdot C_k + \lambda_k C_k = A.C_k$ pour $k \leq n-1$. Ce qui donne :

$$E_A'(s) = \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s) A.C_k + y_n(s) \lambda_n C_n$$

reste à vérifier $\lambda_n C_n = A C_n$ soit $(A - \lambda_n I_n) C_n = 0$. C'est le résultat de la question II.1.b)

$$\boxed{E_A'(s) = A.E_A(s)}$$

De plus $E_A(0) = \sum_{k=1}^n y_k(0) C_k$. Or $Y(0) = Y_0$ et donc $y_1(0) = 1$ et pour $k \geq 2$ $y_k(0) = 0$ donc $\boxed{E_A(0) = C_1 = I_n}$

- b) Par commutativité (cf II.1.a) on peut remarquer que $A.C_k = C_k.A$ et donc par linéarité du produit $A.E_A(s) = E_A(s).A$. Et donc

$$\boxed{E_A'(s) = A.E_A(s) = E_A(s).A \text{ et } E_A(0) = I_n}$$

- c) ϕ est le produit de deux fonctions dérivables, donc est dérivable et

$$\phi'(s) = E_A(s) \cdot (E_A(-s))' + E_A'(s) \cdot E_A(-s) = E_A(s) \cdot (-E_A'(-s)) + E_A'(s) \cdot E_A(-s)$$

en utilisant le théorème de dérivation d'une fonction composée. De plus $E_A'(s) = A.E_A(s)$ donc $E_A'(-s) = A.E_A(-s)$ donc

$$\phi'(s) = -E_A(s) \cdot A.E_A(-s) + A.E_A(s) \cdot E_A(-s)$$

et comme $A.E_A(s) = E_A(s).A$ on a $\phi'(s) = 0$. Tous les coefficients de la matrice $\phi(s)$ ont une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ (intervalle) donc tous les coefficients sont constants donc aussi ϕ et comme $\phi(0) = E_A(0)^2 = I_n$

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, \phi(s) = I_n}$$

Le même calcul avec $\theta(s) = E_A(-s).E_A(s)$ donne : $\forall s \in \mathbb{R}, \theta(s) = I_n$.

On a donc : $\forall s \in \mathbb{R} : E_A(s).E_A(-s) = E_A(-s).E_A(s) = I_n$, et donc

$$\boxed{E_A(s) \text{ est inversible d'inverse } E_A(-s)}$$

- d) Le même type de calcul donne :

$$\psi'(s) = E_A(-s).F'(s) - E_A'(-s).F(s) = E_A(-s).A.F(s) - A.E_A(-s).F(s) = 0$$

donc ψ est constante. Or $\psi(0) = E_A(0).F(0) = I_n$. Donc pour tout s $\psi(s) = I_n$ et donc $E_A(-s).F(s) = I_n$. On sait que $E_A(-s)$ est inversible donc

$$F(s) = E_A(-s)^{-1} = E_A(s)$$

$$\boxed{E_A \text{ est l'unique solution du problème (1)}}$$

- e) Idem avec $\theta(s) = F(s)E_A(-s)$

La fonction précédente ne marche pas car on ne peut pas commuter $F(s)$ et $A(s)$

II.3 : exemple

- Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Avec les calculs de I.1 je prend $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$ (vous pouvez faire un autre choix sur l'ordre le résultat sera le même avec des calculs intermédiaires différents)

On a donc $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = (M - 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ et $C_3 = (M + I_3)(M - 2I_3) = 0$ d'après I.1.d)

et $e^{sM} = y_1(s)C_1 + y_2(s)C_2 + 0$

reste à calculer $y_1(s)$ et $y_2(s)$:

- $y_1(s)$ vérifie $y_1(0) = 1$ et $y_1'(s) = 2y_1(s)$ donc $y_1(s) = e^{2s}$
- $y_2(s)$ vérifie $y_2(0) = 0$ et $y_2'(s) = -y_2(s) + e^{2s}$. Les solutions de l'équation homogène sont $y(s) = Ke^s$ et la recherche d'une solution particulière de $y_2'(s) = -y_2(s) + e^{2s}$ du type $s \rightarrow ke^{2s}$ donne $k = 1/3$ d'où $y_2(s) = \frac{e^{2s} - e^{-s}}{3}$

$$\begin{aligned} e^{sM} &= e^{2s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{2s} - e^{-s}}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} = e^{2s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^{2s} - e^{-s}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= e^{2s} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + e^{-s} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

remarque : par prudence vérifier le calcul en comparant $(e^{sM})'$ et $M.e^{sM}$

II.4 Une solution est $Z(s) = e^{sA}Z_0$ en effet :

- $Z(0) = e^{0A}.Z_0 = E_A(0).Z_0 = I_n.Z_0 = Z_0$
- $(Z(s))' = (e^{sA})'.Z_0 + e^{sA}.Z_0' = A.e^{sA}.Z_0 + 0 = A.Z(s)$

De plus on sait que le problème de Cauchy admet une unique solution vérifiant une condition initiale donnée . d'où l'unicité de la solution.

PARTIE III

III.1 Par la formule de définition chaque matrice C_k est un polynôme en A et donc par combinaison linéaire $e^{sA} = E_A(s) = \sum_{k=1}^n y_k(s)C_k$ aussi.

On peut remarquer que $e^{sA} = P_A(A)$ avec $d^0(P_A) \leq n-1$ et que les coefficients dépendent des valeurs propres donc de A .

Je note $e^{sA} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,A}A^k$

III.2 quelques calculs sur les exponentielles de matrices

- a) On a

$$A.e^{sB} = A. \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,B}B^k = \sum_{k=0}^{n-1} A.(p_{k,B}B^k) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,B}B^k.A = e^{sB}.A$$

car $A.B = B.A \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, A.B^k = B^k.A$

- b) De même

$$\sum_{k=0}^{n-1} (p_{k,A}A^k) e^{sB} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{sB} (p_{k,A}A^k)$$

- c) On a par définition de $E_{A+B}(s)$

$$\mu'(s) = (A+B)\mu(s) \text{ et } \mu(0) = I_n$$

et on a (en utilisant la commutativité de e^{sA} et B)

$$\begin{cases} \nu'(s) = (e^{sA})'.e^{sB} + e^{sA}(e^{sB})' = A.e^{sA}.e^{sB} + e^{sA}.B.e^{sB} = (A+B).(e^{sA}.e^{sB}) = (A+B).\nu(s) \\ \nu(0) = e^{0A}.e^{0B} = I_n.I_n = I_n \end{cases}$$

Par unicité de la solution de l'équation différentielle $\begin{cases} X'(s) = A_0X(s) \\ X(0) = I_n \end{cases}$ avec $A_0 = A+B$ (cf II.2.d)) on a : $\forall s \in \mathbb{R}, \mu(s) = \nu(s)$ En particulier pour $s = 1$

$$\boxed{(AB = BA) \Rightarrow (e^{A+B} = e^A.e^B)}$$

III.3 un contre exemple si $A.B \neq B.A$

On constate $A.B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

pour A on a $Sp(A) = \{0, 1\}$ d'où $C_1 = I_2$ et $C_2 = A$

y_1 vérifie $y_1'(s) = 0$ et $y_1(0) = 1$ donc $y_1(s) = 1$

y_2 vérifie $y_2'(s) = y_2(s) + y_1(s) = y_2(s) + 1$ et $y_2(0) = 0$ d'où $y_2(s) = e^s - 1$

donc : $e^{sA} = 1.C_1 + y_2(s)A = (e^s - 1)A + I_3$

pour B on a $Sp(B) = \{0, 1\}$ d'où (même calcul) $e^{sB} = (e^s - 1)B + I_3$

pour $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a encore $Sp(A + B) = \{0, 2\}$ et $e^{s(A+B)} = \frac{(e^{2s}-1)}{2} (A + B) + I_3$

d'où $e^A = (e - 1)A + I_3 = \begin{pmatrix} e & e - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e^B = (e - 1)B + I_3 = \begin{pmatrix} e & 1 - e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e^{A+B} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e^A.e^B = \begin{pmatrix} e^2 & 2e - 1 - e^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

III.4 autres propriétés de e^{sA}

- a) On pose $\phi : s \mapsto e^{s(P^{-1}.A.P)}$ et $\psi : s \mapsto P^{-1}.e^{sA}.P$ et on vérifie que les deux fonctions vérifient la même équation différentielle:

$$\phi(0) = e^{0(P^{-1}.A.P)} = I_n \text{ et } \psi(0) = P^{-1}.I_n.P = I_n$$

$$\phi'(s) = (P^{-1}.A.P) \cdot \phi(s) \text{ et } \psi'(s) = P^{-1} \cdot (A.e^{sA}) \cdot P = P^{-1}.A \cdot (P.\psi(s).P^{-1}) \cdot P = P^{-1}.A.P \cdot \psi(s)$$

remarque : attention à la rédaction P et e^{sA} ne commute pas.

les deux fonctions sont solutions de $E'(s) = B.E(s)$, $E(0) = I_n$ avec $B = P^{-1}.A.P$. Par unicité de la solution d'un tel problème on a pour tout s $\phi(s) = \psi(s)$

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, e^{s(P^{-1}.A.P)} = P^{-1}.e^{sA}.P}$$

- b) même principe avec : $\phi : s \mapsto e^{s^t(A)}$ et $\psi : s \mapsto {}^t(e^{sA})$

$$\phi(0) = e^{0^t A} = I_n \quad \psi(0) = {}^t I_n = I_n$$

$\phi'(s) = {}^t A \phi(s)$ et $\psi'(s) = ({}^t(e^{sA}))' = {}^t((e^{sA})') = {}^t(e^{sA}.A) = {}^t A \cdot \psi(s)$; En utilisant II.2.b) et la linéarité de la

transposition pour dire que si F est dérivable à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ${}^t(F') = ({}^t F)'$

les deux fonctions sont solutions de $E'(s) = B.E(s)$, $E(0) = I_n$ avec $B = {}^t A$. Par unicité de la solution d'un tel problème on a pour tout s $\phi(s) = \psi(s)$

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, e^{s^t(A)} = {}^t e^{sA}}$$

partie IV

IV.1 si $Mat(x) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ on a $Mat(u \wedge x) = \begin{pmatrix} bx_3 - cx_2 \\ cx_1 - ax_3 \\ ax_2 - bx_1 \end{pmatrix} = A.X$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

IV.2 par la règle de Sarrus ou en développant

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -c & b \\ c & -\lambda & -a \\ -b & a & -\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\lambda)$$

Comme u est un vecteur de norme 1 il reste $\chi_A(\lambda) = -(\lambda^3 + \lambda)$

On déduit du I.4.c: $-(A^3 + A) = 0$ soit $A^3 = -A$

IV.3 toujours avec l'algorithme du II :

le polynôme caractéristique donne $Sp(A) = \{0, i, -i\}$ d'où :

- $C_1 = I_3$, $C_2 = A$, $C_3 = A.(A - iI_3) = A^2 - iA$
- y_1 vérifie $y_1'(s) = 0$ et $y_1(0) = 1$ donc $y_1(s) = 1$
- y_2 vérifie $y_2'(s) = iy_2(s) + 1$ et $y_2(0) = 0$ soit $y_2(s) = \frac{e^{is}-1}{i} = i(1 - e^{is})$
- y_3 vérifie $y_3'(s) = -iy_3(s) + i(1 - e^{is})$, $y_3(0) = 1$.

On cherche une solution particulière en superposant une solution de $y' = -iy + i$ (soit $y = 1$) et une solution de $y' = -iy - ie^{is}$ (soit $y = -\frac{e^{is}}{2}$)

$$y_3(s) = 1 - \frac{1}{2}e^{is} - \frac{1}{2}e^{-is}$$

D'où

$$\begin{aligned}
e^{sA} &= I_3 + i(1 - e^{is})A + \left(1 - \frac{1}{2}e^{is} - \frac{1}{2}e^{-is}\right)(A^2 - iA) \\
&= I_3 + i\left(\frac{e^{-is} - e^{is}}{2}\right)A + \left(1 - \frac{1}{2}e^{is} - \frac{1}{2}e^{-is}\right)A^2 \\
&= I_3 + \sin(s)A + (1 - \cos(s))A^2
\end{aligned}$$

On peut alors utiliser II.4

$$\boxed{X(s) = (I_3 + \sin(s)A + (1 - \cos(s))A^2) X_0}$$

Remarque : On peut aussi vérifier que est solution $(I_3 + \sin(s)A + (1 - \cos(s))A^2)$ du problème (1)

IV.4 . En comparant avec la matrice trouvée au IV.1 il suffit de prendre $a = 1, b = c = 0$. On prend donc une base orthonormée telle que le premier vecteur de base soit u (elle existe car u est unitaire) soit alors $B_0 = (u, v, w)$ la base orthonormée que je choisis directe . Soit U, V, W les matrices de u, v, w dans la base initiale On a $AU = 0$ (car $u \wedge u = 0$) $AV = W$ et $AW = -V$ donc

- $mat_B(g(u)) = e^{sA}.U = U + \sin(s)A.U + (1 - \cos(s))A.A.U = U$ donc $g(u) = u$
- $mat_B(g(v)) = e^{sA}V = V + \sin(s)W + (1 - \cos(s))(-V) = \cos(s)V + \sin(s)W$
- $mat_B(g(w)) = e^{sA}W = W + \sin(s)(-V) + (1 - \cos(s))(-W) = \cos(s)W - \sin(s)V$

$$\text{d'où } mat_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(s) & -\sin(s) \\ 0 & \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} . \boxed{\text{On obtient une rotation d'axe dirigé par } u \text{ et d'angle } s} .$$

Si on note P la matrice de passage telle que $B = PAP^{-1}$ on a d'après III.4 :

$$e^{sB} = e^{sPAP^{-1}} = Pe^{sA}P^{-1} = Pmat_B(g)P^{-1} = mat_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(s) & -\sin(s) \\ 0 & \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}$$