

Préliminaire

P.1.a) $\boxed{X = PU}$.

P.1.b) Si $\overrightarrow{OM} = u.\vec{i} + v.\vec{j}$ alors $\overrightarrow{OM} = 2u.\vec{i} + v.\vec{j}$.

On a donc $2u.\vec{i} + v.\vec{j} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ d'où $\begin{cases} 2u = x \\ v = y \end{cases}$ car la famille (\vec{i}, \vec{j}) est libre.

Par suite, $\boxed{\begin{cases} u = \frac{1}{2}x \\ v = y \end{cases}}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne bien $P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

P.2) Si B est une base orthonormée alors $u^2 + v^2 = OM^2$ donc $M \in \gamma \Leftrightarrow OM^2 = 1 \Leftrightarrow OM = 1$.

$\boxed{\text{Si } B \text{ est orthonormée alors } \gamma \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1}$.

P.3.a) Si $P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\det(P_0) = 4 \neq 0$ donc P_0 est inversible.

$Q_0 = P_0^{-1} = \frac{1}{\det(P_0)} {}^t\text{Com}(P_0) = \frac{1}{4} {}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{Q_0 = P_0^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

P.3.b) $A_0 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{A_0 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}}$.

La matrice A_0 est symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres de A_0 .

$P_{A_0}(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A_0).\lambda + \det(A_0) = \lambda^2 - \frac{17}{16}\lambda + \frac{1}{16} = \left(\lambda - \frac{1}{16}\right)(\lambda - 1)$ donc $\boxed{\text{sp}(A_0) = \left\{ \frac{1}{16}, 1 \right\}}$.

$\rightarrow (x, y) \in E_{1/16}(A_0) \Leftrightarrow x = 2y$. On choisit $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

$\rightarrow (x, y) \in E_1(A_0) \Leftrightarrow y = -2x$. On choisit $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$.

$\boxed{D_0 = R_0^{-1}.A_0.R_0 \text{ avec } D_0 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \text{ et } R_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in O(2)}$.

P.4) La matrice de la forme quadratique $ax^2 + by^2 + 2cxy$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$.

C'est une matrice symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres de A .

Le produit de ses valeurs propres est donc égal à son déterminant $ab - c^2 > 0$.

Ses deux valeurs propres sont donc deux réels α et β non nuls et de même signe.

Dans une base orthonormale de vecteurs propres de A_0 , C a pour équation: $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$.

\rightarrow Si $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ alors $C = \emptyset$.

\rightarrow Si $\alpha = \beta > 0$ alors C est le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

\rightarrow Si $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\alpha \neq \beta$ alors C est une ellipse.

Partie I Etude d'un exemple

I.1) \vec{m} a pour coordonnées (u, v) dans la base B signifie $\vec{OM} = u.\vec{I} + v.\vec{J}$
 $s(\vec{m}) = u.\vec{I} - v.\vec{J}$ car $u.\vec{I} \in D_I$ et $v.\vec{J} \in D_J$.
 Donc $\boxed{(u', v') = (u, -v)}$.

I.2) $M(u, v) \in \gamma^+ \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + (-v)^2 = 1 \\ -v \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow s(M) \in \gamma^-$.
 Donc $\boxed{\gamma^- = s(\gamma^+)}$.

$M(u, v) \in \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ v \leq 0 \text{ ou } v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ v \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in \gamma^- \cup \gamma^+$.
 Donc $\boxed{\gamma = \gamma^- \cup \gamma^+}$.

I.3) $\vec{m}(u, v) \in \gamma \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1$ donc $\vec{m}(u, v) \in \gamma \Rightarrow u^2 \leq 1$ soit $-1 \leq u \leq 1$.
 $\boxed{\vec{m}(u, v) \in \gamma \Rightarrow u \in [-1, 1]}$.

I.4) $u^2 + v^2 = 1 \Leftrightarrow v^2 = 1 - u^2$. Si $v \geq 0$ alors $u^2 + v^2 = 1 \Leftrightarrow v = \sqrt{1 - u^2}$.
 Donc γ^+ est la courbe représentative de la fonction $\boxed{\varphi : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \sqrt{1 - u^2} \end{cases}}$.

I.5) \rightarrow Les questions 1.1 et 1.2 indique que si on trace γ^+ (partie de la courbe au dessus de D_I) on obtient γ^- (partie de la courbe au dessous de D_I) par symétrie (non orthogonale) par rapport à D_I dans la direction de D_J .
 \rightarrow La question 1.3 indique que u varie de -1 à 1 .
 \rightarrow La question 1.4 dit que γ^+ est la courbe représentative de la fonction $\varphi: u \in [-1, 1] \mapsto \sqrt{1 - u^2}$.

On trace alors le vecteur $\vec{I} = 2\vec{i}$ et le vecteur $\vec{J} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
 On trace la représentation graphique de φ dans le repère non orthonormal (O, \vec{I}, \vec{J}) .
 On trace enfin la symétrie de cette courbe par rapport à D_I dans la direction de D_J .

I.6) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ce qui donne $\boxed{\begin{cases} u = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y \\ v = \frac{1}{2}y \end{cases}}$

$$u^2 + v^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right)^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{9}{16}y^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1.$$

Dans B_0 , une équation de γ est donc $\boxed{\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{13}{16}y^2 = 1}$.

I.7) On se place dans la base orthonormale directe (\vec{e}_1, \vec{e}_2) définie au P.3.b.
 Dans cette base, une équation de γ est $\frac{X^2}{4^2} + \frac{Y^2}{1^2} = 1$.

On reconnaît une ellipse de centre O , de grand axe dirigé par \vec{e}_1 et de petit axe dirigé par \vec{e}_2 .
 $a = 4$ et $b = 1$ donnent $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15}$ et $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Partie II

Détermination de la nature de γ dans le cas général

II.1) ${}^tU.U = 1 \Leftrightarrow (u \ v) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1$. Donc $\boxed{\vec{m} \in \gamma \Leftrightarrow {}^tU.U = 1}$.

II.2) On note $P^{-1} = Q$ et $A = {}^tQ.Q$.

$$X = P.U \Leftrightarrow U = P^{-1}.X \Leftrightarrow U = Q.X \quad \text{et} \quad {}^tU = {}^tX.{}^tQ.$$

$$\text{Dès lors } {}^tU.U = 1 \Leftrightarrow {}^tX.{}^tQ.Q.X = 1 \Leftrightarrow {}^tX.A.X = 1.$$

$$\text{Donc } \boxed{\vec{m} \in \gamma \Leftrightarrow {}^tX.A.X = 1}.$$

II.3) $\rightarrow {}^tA = {}^t({}^tQ.Q) = {}^tQ.{}^t({}^tQ) = {}^tQ.Q = A$ donc $\boxed{A \text{ est symétrique}}$.

$\rightarrow A$ est symétrique à coefficients réels donc A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres de A .

Par suite, on peut trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que: $A = P.D.{}^tP$ (tP car P est orthogonale donc $P^{-1} = {}^tP$).

$$\text{Si } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et si } X = P.X' \text{ (donc si } X' = {}^tP.X)$$

$$\text{alors } {}^tX.A.X = 1 \Leftrightarrow {}^tX.P.D.{}^tP.X = 1 \Leftrightarrow {}^t({}^tP.X).D.({}^tP.X) = 1 \Leftrightarrow {}^tX'.D.X' = 1.$$

Si on note $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors, dans la base orthonormale B' de vecteurs propres de A

correspondant à la matrice P , l'équation de γ s'écrit: $\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1}$

avec λ_1 et λ_2 qui sont les valeurs propres de la matrice A .

II.4) Rappel: X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ ssi $X \neq O$ et $A.X = \lambda X$.

$$\rightarrow \text{ Dans ce cas, } \|Q.X\|^2 = {}^t(Q.X).(Q.X) = {}^tX.{}^tQ.Q.X = {}^tX.(A.X) = {}^tX.(\lambda X) = \lambda({}^tX.X) = \lambda\|X\|^2.$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{si } X \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } \lambda \text{ alors } \|Q.X\|^2 = \lambda\|X\|^2}.$$

$$\rightarrow \text{ Comme } X \neq O, \|X\| \neq 0 \text{ donc } \lambda = \frac{\|Q.X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0.$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont donc toutes positives}}$.

II.5) $\rightarrow P$ est une matrice de changement de base donc P est inversible.

Par suite, $Q = P^{-1}$ est aussi inversible de même que tQ .

$\boxed{A \text{ est une matrice inversible comme produit de deux matrices inversibles}}$.

$\rightarrow A$ étant inversible, 0 n'appartient pas au spectre de A .

Par ailleurs, on vient de voir que les valeurs propres de A sont toutes positives.

On en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont strictement positives}}$.

II.6) On se place dans la base orthonormale B' .

$$\text{L'équation de } \gamma \text{ s'écrit } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ avec } a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}.$$

\rightarrow Si $\lambda_1 = \lambda_2$ alors γ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$.

\rightarrow Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors γ est une ellipse dont les axes sont dirigés par les vecteurs propres de A formant la base B' .

Partie III

Une construction géométrique de γ

III.1) On rappelle que P est la matrice de passage de la base B_0 à la base B .
Par suite, P^{-1} est la matrice de passage de la base B à la base B_0 .

Par ailleurs, P est aussi la matrice de l'endomorphisme f dans la base B_0 .

Si \vec{m} a pour coordonnées (x, y) dans la base B_0

alors les coordonnées de $f(\vec{m})$ dans la base B_0 sont $P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

et les coordonnées de ce même vecteur dans la base B sont $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{(x, y) = (u', v')}$.

III.2) Soit \vec{m}' de coordonnées (x, y) dans la base B_0 , $\vec{m}' \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Si $\vec{m} = f(\vec{m}')$ alors les coordonnées de \vec{m} sont encore (x, y) mais dans la base B
et la relation $x^2 + y^2 = 1$ signifie que $\vec{m} \in \gamma$.

Comme P est une matrice de passage, P est inversible et f est un automorphisme.

Par suite: $\vec{m}' \in C \Leftrightarrow f(\vec{m}') \in \gamma$ ce qui donne bien $\boxed{\gamma = f(C)}$.

III.3) Dans B_0 , la droite D d'équation $x = 1$ est tangente en \vec{i} au cercle de centre O et de rayon 1.
De plus $D = (I, \vec{j})$ donc $f(D) = (f(I), f(\vec{j})) = (U, \vec{J})$ est la droite d'équation $u = 1$ dans la base B .

Comme f est un automorphisme, le théorème donné permet de dire:

$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } u = 1 \text{ est tangente à } \gamma \text{ au point } \vec{I} \text{ de coordonnées } (1, 0) \text{ dans } B}$.

On montre de même que

- la droite Δ_1 d'équation $u = -1$ est tangente à γ au point $-\vec{I}$ de coordonnées $(-1, 0)$ dans B ,
- la droite Δ_2 d'équation $v = 1$ est tangente à γ au point \vec{J} de coordonnées $(0, 1)$ dans B ,
- la droite Δ_3 d'équation $v = -1$ est tangente à γ au point $-\vec{J}$ de coordonnées $(0, -1)$ dans B .

III.4) On travaille dans la base orthonormale B_0 .

→ $\overrightarrow{AB}_\lambda(-\lambda, 1)$ est un vecteur directeur de $D_{1,\lambda}$ et $\overrightarrow{CD}_\lambda(1, \lambda)$ est un vecteur directeur de $D_{2,\lambda}$.

Comme $\overrightarrow{AB}_\lambda \cdot \overrightarrow{CD}_\lambda = -\lambda + \lambda = 0$ alors $\boxed{D_{1,\lambda} \text{ et } D_{2,\lambda} \text{ sont orthogonales}}$.

→ $M(x, y) \in D_{1,\lambda} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -\lambda \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + \lambda y = 1}$.

$M(x, y) \in D_{2,\lambda} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda x - y = -\lambda}$.

Le point d'intersection de $D_{1,\lambda}$ et de $D_{2,\lambda}$ est le point $m_\lambda \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \right)$.

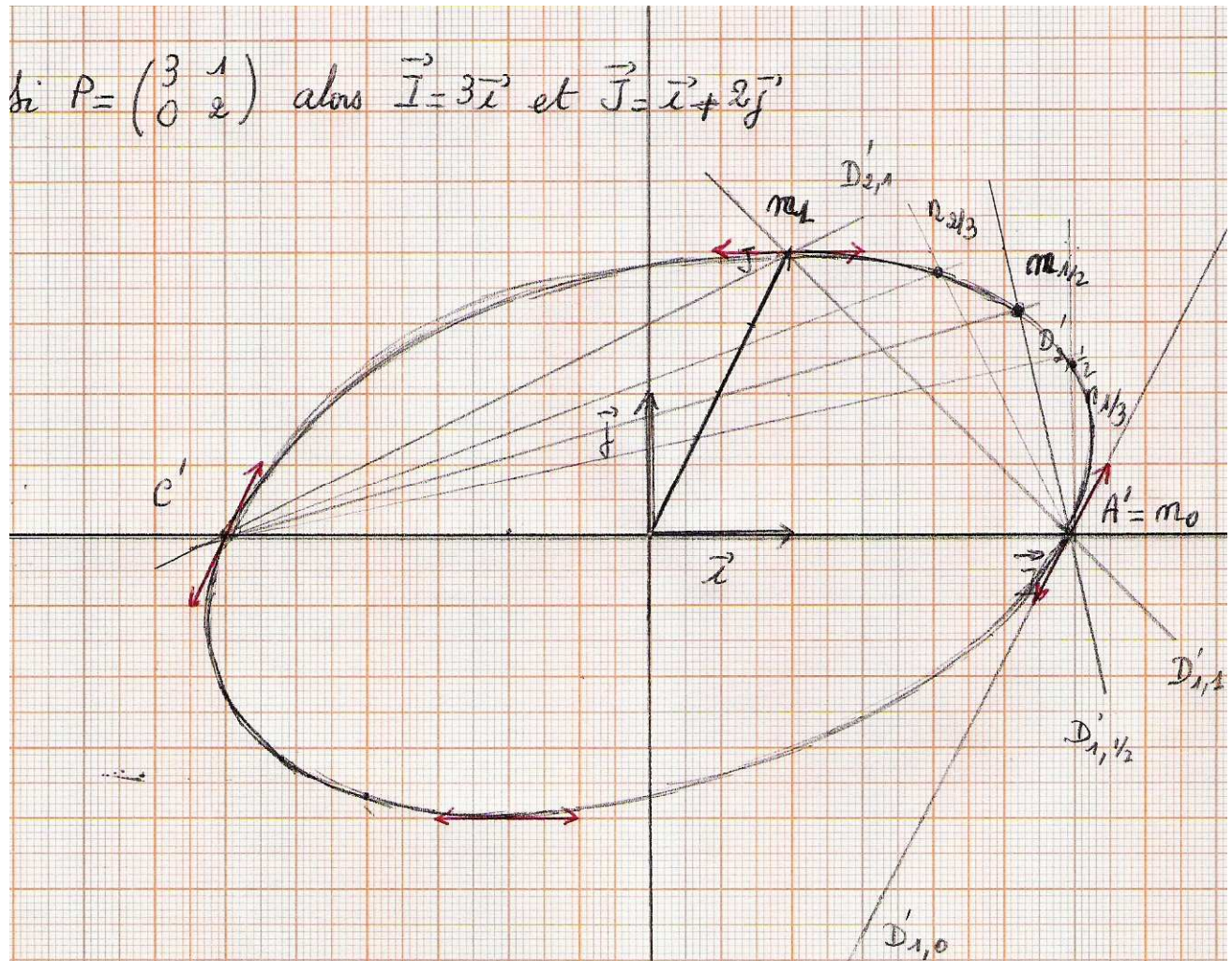
$$\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^2 + \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 = \frac{1-2\lambda^2+\lambda^4+4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} = \frac{1+2\lambda^2+\lambda^4}{(1+\lambda^2)^2} = \frac{(1+\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2} = 1$$

Donc $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, m_\lambda = D_{1,\lambda} \cap D_{2,\lambda} \in C}$.

Pour obtenir $n_\lambda = f(m_\lambda)$,

- on place les points $A'(1, 0)$, $B'_\lambda(1 - \lambda, 1)$, $C'(-1, 0)$ et $D'_\lambda(0, \lambda)$ dans la base B ,
- on trace les droites $(A'B'_\lambda) = f(D_{1,\lambda})$ et $(C'D'_\lambda) = f(D_{2,\lambda})$.
- n_λ est à l'intersection de ces deux droites.

III.5)



III.6)

→ Si K est le parallélogramme $ABCD$ alors $A(K) = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$

Par suite, $A[f(K)] = |\det(f(\overrightarrow{AB}), f(\overrightarrow{AD}))| = |\det(f) \cdot \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$
 (formule de changement de base pour le déterminant d'une famille de vecteurs).

Par suite: $A[f(K)] = |\det(f)| \times A(K)$.

→ $A(C) = \pi$ donc $A(\gamma) = |\det(P)| \cdot \pi$.