

Exercice 1

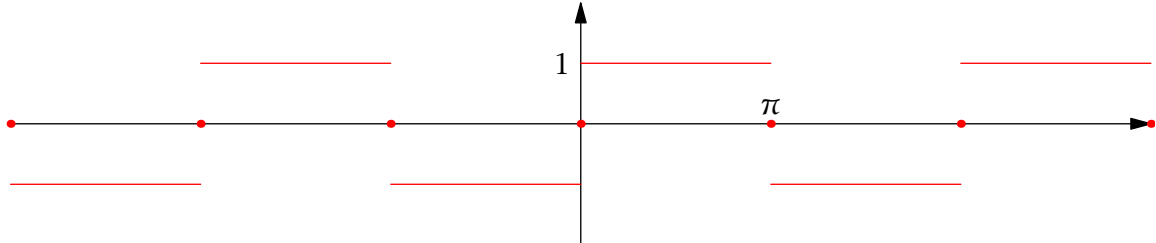
1. f est impaire, donc $f(0) = 0$.

f est impaire, donc $f(-\pi) = -f(\pi)$, et f est 2π périodique, donc $f(-\pi) = f(\pi)$.

Finalement $f(\pi) = -f(\pi)$, et $f(\pi) = 0$.

$$f\left(\frac{13\pi}{4}\right) = f\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f\left(4\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

2.



3. a. f est impaire, donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{2}{n\pi} [-\cos(nt)]_0^\pi = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Si n est pair, on pose $n = 2p$, et on a $b_{2p} = 0$.

Si n est impair, on pose $n = 2p + 1$, et on a $b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}$.

- b. La série de Fourier de f est donc

$$S(f)(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1} \sin((2p+1)t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)t)}{2p+1}.$$

$$\text{On réécrit } S(f)(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}.$$

Notons que f est 2π périodique, de classe $\mathcal{C}_1$ par morceaux, ceci assure que la série de Fourier de f converge en tout point.

De plus, en tout point, $f(t)$ est la demi-somme des limites à droite et à gauche en ce point.

Ceci nous prouve que la série de Fourier de f converge en tout point t vers $f(t)$.

$$\text{Et donc, } \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}.$$

- c. Cette égalité est donc valable pour $t = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{et donc, } 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

$$\text{Ce qui donne } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

- d. La formule de Parseval nous dit que $a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f^2(t) dt$.

$$\text{On l'applique ici en tenant compte que } f \text{ est impaire, } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b_{2p+1}^2}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt.$$

$$\text{Ce qui donne } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{(2p+1)^2 \pi^2} = 1.$$

Finalement, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. a. $|\exp(-xt)f(t)| \leq \exp(-xt)$, et comme $\int_0^{+\infty} \exp(-xt) dt$ converge, la fonction donnée est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- b. Sur $]k\pi, (k+1)\pi[$, on a $f(t) = (-1)^k$, et donc
- $$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \exp(-xt)f(t) dt &= (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \exp(-xt) dt = (-1)^k \frac{\exp(-(k+1)\pi x) + \exp(-k\pi x)}{x} \\ &= \left(-\exp(-\pi x)\right)^k \frac{1 - \exp(-\pi x)}{x} \end{aligned}$$
- c. $\int_0^{+\infty} \exp(-xt)f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(n+1)\pi} \exp(-xt)f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \exp(-xt)f(t) dt$
- $$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1 - \exp(-\pi x)}{x} \left(-\exp(-\pi x)\right)^k = \frac{1 - \exp(-\pi x)}{x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(-\exp(-\pi x)\right)^k \\ &= \frac{1 - \exp(-\pi x)}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\exp(-\pi x)\right)^k = \frac{1 - \exp(-\pi x)}{x} \times \frac{1}{1 + \exp(-\pi x)} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1 - \exp(-\pi x)}{1 + \exp(-\pi x)} = \frac{1}{x} \times \frac{\exp(\pi x/2) - \exp(-\pi x/2)}{\exp(\pi x/2) + \exp(-\pi x/2)} = \frac{1}{x} \operatorname{th}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 2

1. f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.
- $$0 < x_1 \leq x_2 \Rightarrow 0 < x_1 + t \leq x_2 + t \Rightarrow \frac{\exp(t)}{x_1 + t} \geq \frac{\exp(t)}{x_2 + t} \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
- f est bien décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. a. $f(x) - f(x_0) = \int_0^1 \exp(t) \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t} \right) dt = \int_0^1 \exp(t) \frac{x_0 - x}{(x+t)(x_0+t)} dt$
- $$|f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^1 \exp(t) \frac{|x - x_0|}{(x+t)(x_0+t)} dt \leq \int_0^1 e \frac{|x - x_0|}{x_0 x} dt \leq \frac{e|x - x_0|}{x_0 x}$$
- Finalement, $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x - x_0|}{x_0^2} \text{ sur } \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$.
- b. Ceci prouve que, quand $x \rightarrow x_0$, alors $f(x) \rightarrow f(x_0)$, f est continue en x_0 .
Dans un deuxième temps, bien sûr, f est bien continue sur $\mathbb{R}^{+}$.*
3. On a $\frac{\exp(t)}{x+1} \leq \frac{\exp(t)}{x+t} \leq \frac{\exp(t)}{x}$,
donc $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{x+1} dt \leq \int_0^1 \frac{\exp(t)}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{\exp(t)}{x} dt$,
et enfin, $\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$.
- Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e-1} f(x) = 1$, et donc, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$.
4. a. La dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle, donc,
 $|\exp(t) - \exp(0)| \leq \max_{t \in [0,1]} |\exp(t)| |t - 0|$.
- Ce maximum est e , on a, compte tenu que t est positif,
 $\forall t \in [0, 1], |\exp(t) - 1| \leq et$.

b. L'inégalité précédente donne $\left| \frac{\exp(t) - 1}{x + t} \right| \leq e \frac{t}{x + t} \leq e$.

Ce qui entraîne $|g(x)| \leq e$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

c. $f(x) = g(x) + \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = g(x) + \ln(x+1) - \ln(x)$.

D'où $f(x) = -\ln(x) \left(1 - \frac{g(x) + \ln(x+1)}{\ln(x)} \right)$.

$\frac{g(x) + \ln(x+1)}{\ln(x)} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, et on a bien $f(x) \underset{0+}{\sim} -\ln(x)$.

5. a. $h(t) = \frac{\exp(t)}{1+t}$, un calcul facile donne $h'(t) = \frac{t \exp(t)}{(1+t)^2} \geq 0$, pour $t \geq 0$.

h est bien croissante sur $[0, 1]$.

b. u_n et v_n sont des sommes de Riemann, ce sont des valeurs approchées de $\int_0^1 h(t) dt$.

C'est un calcul d'aires « en bâtons ».

c. Sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$, on a $h\left(\frac{k}{n}\right) \leq h(t) \leq h\left(\frac{k+1}{n}\right)$, qu'on intègre sur l'intervalle,

ce qui donne $\frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$,

d. Et maintenant, on somme de $k = 0$ à $k = n - 1$, $u_n \leq \int_0^1 h(t) dt \leq v_n$, et on reconnaît $f(1)$!

On a donc $u_n \leq f(1) \leq v_n$.

Et maintenant, $u_n - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2} \leq f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2}$,

ou encore, $\left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{h(1) - h(0)}{2n}$.

e. Il suffit d'avoir $\frac{h(1) - h(0)}{2n} \leq \frac{10^{-2}}{2}$, pour avoir le résultat demandé,

c'est à dire $n \geq 50(h(1) - h(0)) = 50\left(\frac{e}{2} - 1\right) \simeq 17,95$.

$n_0 = 18$ convient donc. On trouve $f(1) \simeq \frac{113}{100}$.

Exercice 3

1. Pour $x_0 > 0$, ce sont des séries numériques à termes strictement positifs. Le critère de d'Alembert donne à chaque fois une convergence pour $x_0 < 1$ et une divergence sinon.

Les trois séries ont donc un rayon de convergence égal à 1.

On se place donc à chaque fois sur $] -1, 1[$.

2. $f(x) = \frac{x}{1-x}$, comme somme d'une série géométrique.

La somme d'une série entière se dérive terme à terme sur l'ouvert de convergence,

donc, $xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = h(x)$.

Et ainsi, $h(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

3. a. Pour $x_1, x_2 \in [0, 1]$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1^n \leq x_2^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x_1^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x_2^n \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$.

g est bien croissante sur $[0, 1]$.

b. On a $g(x) \geq f(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1_-} +\infty$, donc, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1_-} +\infty$.

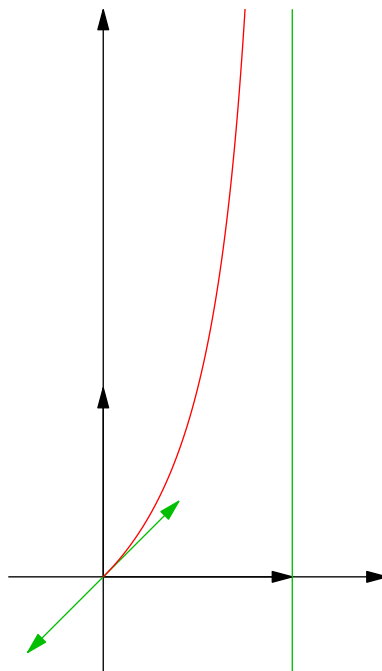
c. on a facilement $g(0) = 0$, et en dérivant terme à terme, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\sqrt{n}x^{n-1}$.

Donc $g'(0) = 1$.

De plus, toujours en dérivant terme à terme, $g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\sqrt{n}x^{n-2}$.

On a donc $g''(0) = 2\sqrt{2} \geq 0$, la concavité est tournée vers le haut.

On rappelle que g est croissante sur $[0, 1[$, où l'allure de la courbe est donc :



4. a. g est strictement croissante sur $[0, 1[$, et, $g([0, 1[) = [0, +\infty[$, il existe donc un α unique de $[0, 1[$, tel que $g(\alpha) = 2$.
 b. $h(0, 5) = 0, 5/0, 25 = 2$, et de plus, $g(0, 5) \leq h(0, 5)$, donc, $g(0, 5) \leq 2$.
 Et comme g est croissante, $\alpha \geq 0, 5$.

c. $\sum_{n=1}^5 \sqrt{n}(0, 6)^n \simeq 1, 916$, et, $\sum_{n=1}^6 \sqrt{n}(0, 6)^n \simeq 2, 031$.

On a donc $n_0 = 6$.

Ceci prouve que $g(0, 6) \geq 2$, et donc, $\alpha \leq 0, 6$.

5. a. $(1-x)g(x) = g(x) - xg(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^{n+1}$.

On ré-indexe la seconde somme avec $n' = n + 1$ suivi de $n = n'$, on obtient,

$$(1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n.$$

b. $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \leq 0.$

De plus $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

La suite $|u_n|$ décroît et tend vers 0 à l'infini, la série alternée, $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n$ converge.

c. $\sum_{n=1}^N \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$

La série $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ diverge donc.

Finalement, $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n$

– converge en -1 ,

– diverge en 1 .

Son rayon de convergence est donc 1 .

d. $G(x) = \sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n$ est définie, et donc continue, sur $[-1, 1[$.

Donc $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1_+} G(-1)$, ce qui donne $(1-x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1_+} G(-1)$,

ou encore, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1_+} \frac{G(-1)}{2} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(-1)^n}{2}.$